DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Samedi 14 mai 2022

Durée totale : 2 heures

Exercice 1 (6 points)

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P'(1), P''(2)\big) \end{cases}$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
   $\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \big((\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)'(1), (\lambda P + \mu Q)''(2)\big)$
   $= \lambda\big(P(0), P'(1), P''(2)\big) + \mu\big(Q(0), Q'(1), Q''(2)\big) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$
   donc φ est une application linéaire.
2. (a) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

   Notons $P = aX^2 + bX + c$. $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = c = 0 \\ P'(1) = 2a + b = 0 \\ P''(2) = 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$

   donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

   (b) Que peut-on en déduire sur φ ?
   donc φ est injective.

   (c) En déduire $\operatorname{Im}\varphi$.
   Or $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3$, donc φ est un isomorphisme, et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}^3$.

   $\varphi(1) = (1, 0, 0)$, $\varphi(X) = (0, 1, 0)$ $\varphi(X^2) = (0, 2, 2)$, donc $\operatorname{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. On pose $H_1 = \varphi^{-1}(1, 0, 0), H_2 = \varphi^{-1}(0, 1, 0)$ et $H_3 = \varphi^{-1}(0, 0, 1)$.

   (a) Justifier que (H_1, H_2, H_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   φ est un isomorphisme, donc φ^{-1} également, donc φ^{-1} transforme une base en une base, donc (H_1, H_2, H_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer la matrice A^{-1}.
   $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

   (c) Exprimer H_1, H_2 et H_3 dans la base canonique.
   Nous lisons dans la matrice : $H_1 = 1$, $H_2 = X$, et $H_3 = -X + \dfrac{1}{2}X^2$

Exercice 2 (7 points)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, -x + y, 2x + 2y + 2z)$$

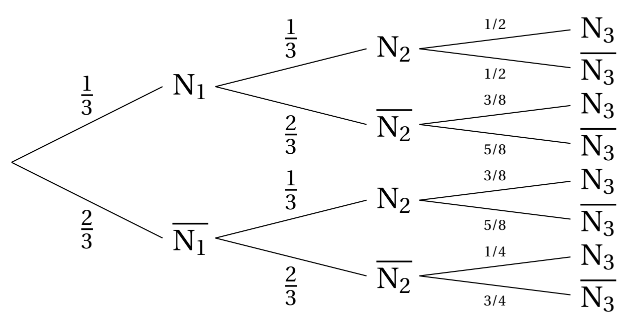
Par ailleurs, on note $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\big\}$.

1. Montrer que F est un plan vectoriel dont on donnera une base.
$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$: F est un plan vectoriel et nous venons d'en exhiber une base.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$f\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big) = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$
$= \big(\lambda x+\mu x'-(\lambda y+\mu y'), -(\lambda x+\mu x')+\lambda y+\mu y', 2(\lambda x+\mu x')+2(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z')\big)$
$= \lambda(x-y,-x+y,2x+2y+2z)+\mu(x'-y',-x'+y',2x'+2y'+2z') = \lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$
donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, c'est un endomorphisme.
3. (a) Déterminer le noyau de f et en préciser une base.
$(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y = 0 \\ x-y = 0 \\ 2x+2y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$: c'est une droite vectorielle.
(b) f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
Non car le noyau de f n'est pas restreint au vecteur nul, f n'est pas injective donc elle n'est pas bijective.
4. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
$f(x,y,z) = x(1,-1,2)+y(-1,1,2)+z(0,0,2)$ donc $\mathrm{Im} f$ est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.
Or le troisième est la demi-somme des deux premiers, qui ne sont pas colinéaires, donc une base de $\mathrm{Im} f$ est $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.
(b) Justifier l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.
Les deux vecteurs de base de $\mathrm{Im} f$ que nous venons d'exhiber appartiennent à F car ils vérifient $x+y=0$, donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{F}$.
Or $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{F} = 2$, donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{F}$.
5. Déterminer un entier k tel que $f^2 = k \times f$.
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2(x,y,z) = (2x-2y,-2x+2y,4x+4y+4z) = 2f(x,y,z)$, donc $f^2 = 2f$.
6. En déduire f^n en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = 2^{n-1} f$ (par récurrence).
7. Montrer que $\mathrm{Im}\left(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right) \subset \mathrm{Ker}(f)$. A-t-on l'égalité ?
$\forall \mathrm{V} \in \mathrm{Im}\left(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$, $\exists \mathrm{U} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{V} = f(\mathrm{U}) - 2\mathrm{U}$, donc $f(\mathrm{V}) = f^2(\mathrm{U}) - 2f(\mathrm{U}) = 0$, donc $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker} f$; donc $\mathrm{Im}\left(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Or $\mathrm{Im}\left(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ n'est pas restreint au vecteur nul car f n'est pas égale à $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, et $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1, donc oui on a l'égalité.

Exercice 3 (3 points)

Chacune des trois urnes U_1, U_2, U_3 contient exactement 2 boules noires et 4 boules blanches. On tire au hasard une boule de U_1, une autre de U_2, et on place ces deux boules dans U_3. On tire alors une boule de U_3.
On notera l'univers Ω et, pour tout $i \in \{1,2,3\}, N_i$ désignera l'événement « la boule tirée de U_i est noire ».
Consigne : On décrira sous forme ensembliste chaque événement avant d'en déterminer sa probabilité. Chaque évaluation devra être justifiée en évoquant les règles appropriées du calcul des probabilités.

1. Quelle est la probabilité de tirer exactement trois boules noires ?
   La probabilité de tirer exactement trois boules noires est $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{18}$.
2. Calculer la probabilité pour que la dernière boule tirée soit blanche.



$$P\left(\overline{N_3}\right) = \frac{1}{18} + \frac{10}{72} + \frac{10}{72} + \frac{12}{36} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

3. On a tiré une boule noire de U_3. Quelle est la probabilité d'avoir également tiré des boules noires de U_1 et U_2 ?

$$P_{N_3}(N_1 \cap N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{P(N_3)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

Exercice 4 (4 points)

Consigne : Les différentes techniques, formules et/ou stratégies employées ici doivent être clairement présentées.

1. Évaluer $I = \displaystyle\int_0^1 t \sin(t) \mathrm{d}t$.
   $I = \left[-t\cos t\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \cos t \mathrm{d}t = -\cos 1 + \left[\sin t\right]_0^1 = -\cos 1 + \sin 1$

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$, est convergente et préciser sa limite.

   On reconnaît une somme de Riemann, et $\lim s_n = \displaystyle\int_0^1 t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sin 1 - \cos 1$.

3. Justifier que, pour tout $u \in [0,\pi]$, on a : $u - \dfrac{u^3}{3!} \leq \sin(u) \leq u$.

   Pour tout $u \in [0,\pi]$, appliquons l'égalité de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction sinus de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,u]$:
   $f(t) = \sin t$, $f'(t) = \cos t$, $f''(t) = -\sin t$ et $f'''(t) = -\cos t$. Donc $\sin u = u - \displaystyle\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.
   Or sur l'intervalle $[0,u]$, $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $0 \leq \displaystyle\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\cos t\,\mathrm{d}t \leq \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\mathrm{d}t$,
   donc $0 \leq \displaystyle\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\cos t\,\mathrm{d}t \leq \left[-\frac{(u-t)^3}{6}\right]_0^u$ donc $0 \leq \displaystyle\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\cos t\,\mathrm{d}t \leq \frac{u^3}{6}$,
   donc $0 \leq u - \sin u \leq \dfrac{u^3}{6}$.

4. Posons $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)$. En s'aidant des questions précédentes, montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Quelle est sa limite ?
   D'après 3, $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^3}{6n^6} \leq \sin\dfrac{k}{n^2} \leq \dfrac{k}{n^2}$,
   donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{6n^6}\sin\frac{k}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$
   or $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4}\sin\frac{k}{n}$ est une somme de Riemann qui tend vers $l = \displaystyle\int_0^1 t^3\sin t\,\mathrm{d}t$,
   donc en appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité : $s_n - \dfrac{1}{6n^2}\mathrm{R}_n \leq \sigma_n \leq s_n$,
   on conclut que (σ_n) converge et a pour limite $\sin 1 - \cos 1$.