DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Samedi 14 mai 2022

Durée totale : 2 heures

Exercice 1 (6 points)

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P'(1), P''(2)\big) \end{cases}$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. (a) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.
   (b) Que peut-on en déduire sur φ ?
   (c) En déduire $\operatorname{Im}\varphi$.
3. Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}^3$.
4. On pose $H_1 = \varphi^{-1}(1,0,0), H_2 = \varphi^{-1}(0,1,0)$ et $H_3 = \varphi^{-1}(0,0,1)$.
   (a) Justifier que (H_1, H_2, H_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice A^{-1}.
   (c) Exprimer H_1, H_2 et H_3 dans la base canonique.

Exercice 2 (7 points)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x-y, -x+y, 2x+2y+2z)$$

Par ailleurs, on note $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0\big\}$.

1. Montrer que F est un plan vectoriel dont on donnera une base.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer le noyau de f et en préciser une base.
   (b) f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
4. (a) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
   (b) Justifier l'égalité $\operatorname{Im}(f) = F$.
5. Déterminer un entier k tel que $f^2 = k \times f$.
6. En déduire f^n en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. Montrer que $\operatorname{Im}\big(f - 2\,\mathrm{id}_E\big) \subset \operatorname{Ker}(f)$. A-t-on l'égalité ?

Exercice 3 (3 points)

Chacune des trois urnes U_1, U_2, U_3 contient exactement 2 boules noires et 4 boules blanches. On tire au hasard une boule de U_1, une autre de U_2, et on place ces deux boules dans U_3. On tire alors une boule de U_3.
On notera l'univers Ω et, pour tout $i \in \{1,2,3\}, N_i$ désignera l'événement « la boule tirée de U_i est noire ».
Consigne : On décrira sous forme ensembliste chaque événement avant d'en déterminer sa probabilité. Chaque évaluation devra être justifiée en évoquant les règles appropriées du calcul des probabilités.

1. Quelle est la probabilité de tirer exactement trois boules noires ?
2. Calculer la probabilité pour que la dernière boule tirée soit blanche.
3. On a tiré une boule noire de U_3. Quelle est la probabilité d'avoir également tiré des boules noires de U_1 et U_2 ?

Exercice 4 (4 points)

Consigne : Les différentes techniques, formules et/ou stratégies employées ici doivent être clairement présentées.

1. Évaluer $I = \displaystyle\int_0^1 t \sin(t)\, dt$.
2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$, est convergente et préciser sa limite.
3. Justifier que, pour tout $u \in [0, \pi]$, on a : $u - \dfrac{u^3}{3!} \leq \sin(u) \leq u$.
4. Posons $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right)$. En s'aidant des questions précédentes, montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Quelle est sa limite ?