DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

Samedi 2 avril 2022

Durée totale : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (0,-1,2), e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$.
Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $\mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$.

1. Montrer que $e_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ puis déterminer une base $\mathscr{B}$ de F.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. F et G sont-ils en somme directe ? Justifier.
4. Soit $v = (1,0,0)$ et $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(v)$.
   (a) Montrer que F et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire le vecteur e_3 comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de H.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{x+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Justifier rapidement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.
2. (a) Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et un équivalent de $f(x)$ en $-\infty$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. (a) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
   (b) En déduire l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position locale de $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente.
   (c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ?

On admet que la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en commençant par faire apparaître la tangente T_0 et les éventuelles asymptotes. On prendra pour unité 2 cm.

Exercice 3 (5 points)

Le portail d'entrée d'une résidence se déverrouille en composant un nombre à 4 chiffres suivi d'une des 26 lettres de l'alphabet latin. Répondre aux questions sous la forme d'une formule suivie de son évaluation numérique.

1. Déterminer le nombre total de codes différents envisageables.
2. Parmi ces codes dénombrer ceux qui répondent aux critères suivants :
   (a) Le nombre est inférieur ou égal à 2022.
   (b) Le nombre est impair et la lettre une voyelle.
   (c) Les quatre chiffres sont de même parité.
   (d) Les quatre chiffres forment une suite strictement croissante et la lettre est une consonne.

Exercice 4 (4 points)

On pose $E = \mathbb{R}_5[X], \mathscr{B} = \left\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\right\}$ sa base canonique et, pour tout polynôme P de E, on pose $\phi(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Évaluer l'image par ϕ des polynômes de la base canonique $\mathscr{B}$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\phi)$. Quel est le rang de ϕ ?
4. Donner la dimension du noyau $\mathrm{Ker}(\phi)$ et en déterminer une base.