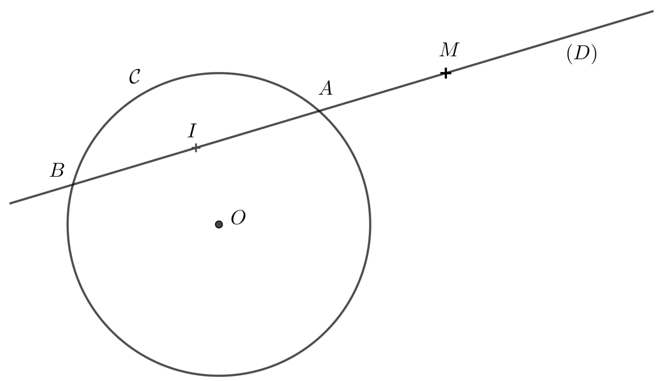
DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 — Samedi 12 mars 2022

Durée totale : 2 heures

Exercice 1 8 points : 1) 0,5-1-1 2) 0,5-0,5-1-1-0,5 3) 1-0,5-0,5

1. On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, un point qui M n'appartient pas à $\mathscr{C}$, et une droite (D) passant par M qui recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points distincts A et B.
   Enfin, on note I le milieu du segment [AB].



   (a)

   (b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)-\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA} = MI^2-IA^2$.

   (c) Dans le triangle OIA rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore,
   on a $OA^2 = IA^2 + OI^2$, donc $IA^2 = OA^2 - OI^2 = R^2 - OI^2$.
   Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 + OI^2 - R^2$,
   or d'après le théorème de Pythagore encore dans le triangle OIM rectangle en I, $MI^2 + OI^2 = 0M^2$,
   donc finalement $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$, où R désigne le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
   On note dans la suite $p_{\mathscr{C}}(M)$ le nombre $OM^2 - R^2$, appelé « puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$ ».

Dans toute la suite, on ramène le plan à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

2. (a) $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) P_θ a pour coordonnées cartésiennes $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$,
   donc $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $P_\theta \in \mathscr{C}$.

   (c) La tangente T_θ à $\mathscr{C}$ passant par P_θ a pour vecteur normal $\overrightarrow{OP_\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$.
   Donc $M(x,y) \in T_\theta \Leftrightarrow \overrightarrow{P_\theta M}.\overrightarrow{OP_\theta} = 0 \Leftrightarrow (x-\cos\theta)\cos\theta + (y-\sin\theta)\sin\theta = 0$
   $\Leftrightarrow (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$.

(d) Les coordonnées (x, y) du point d'intersection Q des droites $T_{\frac{\pi}{3}}$ et $T_{-\frac{\pi}{2}}$ sont solution du système :

$$\begin{cases} \left(T_{\frac{\pi}{3}}\right) & \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \left(T_{-\frac{\pi}{2}}\right) & 0x + (-1)y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}, \text{ donc } Q\left(2+\sqrt{3}, -1\right).$$

(e) Les coordonnées de $P_{-\frac{\pi}{2}}$ sont $(0, -1)$.
Donc $p_{\mathscr{C}}(Q) = OQ^2 - 1^2 = (2+\sqrt{3})^2 + (-1)^2 - 1 = (2+\sqrt{3})^2 = QP_{-\frac{\pi}{2}}{}^2$.

3. On considère la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$.

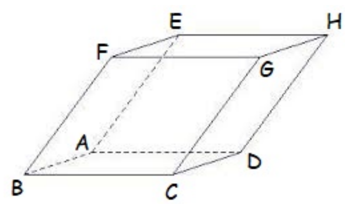
(a) $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ donc $\mathscr{C}'$ est le cercle de rayon $\rho = 2$ et de centre $\Omega(3, 1)$.

(b) Soit $M(x, y)$.
$p_{\mathscr{C}}(M) = p_{\mathscr{C}'}(M) \Leftrightarrow OM^2 - 1 = \Omega M^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = (x-3)^2 + (y-1)^2 - 4$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 4 \Leftrightarrow 6x + 2y - 7 = 0$

(c) Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, donc $\vec{u}.\overrightarrow{O\Omega} = 0$ et donc les droites $(O\Omega)$ et (Δ) sont perpendiculaires.

Exercice 2 7 points : 1) 1 2) 1 3) 2 - 0,5 4) 1 - 1 - 0,5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le solide ABCDEFGH, appelé parallélépipède car ses six faces sont parallèles deux à deux.
On donne $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$, $D(3,-1,0)$ et $E(1,1,4)$.



1. On a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, donc $\begin{cases} x_F = 1 + 1 = 2 \\ y_F = 1 + 2 = 3 \\ z_F = 4 + 0 = 4 \end{cases}$, donc $F(2, 3, 4)$.

   On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$, donc $\begin{cases} x_G = 2 + 3 = 5 \\ y_G = 3 + (-1) = 2 \\ z_G = 4 + 0 = 4 \end{cases}$, donc $G(5, 2, 4)$.

2. $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right) . \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = -28$,

   donc le volume du parallélépipède ABCDEFGH est de 28 unités de volume.

3. (a) Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique du plan (BEG).

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$, donc $\mathrm{M}(x,y,z)\in(\mathrm{BEG}) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{\mathrm{BE}},\overrightarrow{\mathrm{BG}},\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4\\16\\4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -x+4y+z-7=0$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\begin{pmatrix}1\\-4\\-4\end{pmatrix}$, et un vecteur normal du plan (BEG) est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$: les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc la droite (FD) n'est pas orthogonale au plans (BEG).

4. (a) La distance du point F au plan (BEG) est $\dfrac{|-2+4\times3+4-7|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{18}}=\dfrac{7}{6}\sqrt{2}$.

(b) L'aire du triangle BEG est la moitié de la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BE}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{BG}}$, soit $\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}=6\sqrt{2}$ unités d'aire.

(c) Donc le volume de la pyramide FBEG est $\dfrac{1}{3}\times6\sqrt{2}\times\dfrac{7}{6}\sqrt{2}=\dfrac{14}{3}$ unités de volume.

Exercice 3 9 points : 1) 1,5 2) 0,5 3) 2 4) 1 5) 1,5 6) 1 7) 1,5

Notations : On pose $\mathrm{E}=\mathbb{R}_6[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F}=\left\{\mathrm{P}\in\mathrm{E}/\mathrm{P}(1)=\mathrm{P}'(1)=\mathrm{P}'''(1)-6\mathrm{P}''(1)=0\right\}$,
$\mathrm{A}=\mathrm{X}^6-2\mathrm{X}^5+2\mathrm{X}^4-2\mathrm{X}^3+2\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+1$, et $\mathrm{B}=\mathrm{X}^2+1$.

1. Évaluer le reste R de la division euclidienne de A par B. Puis montrer que B est un facteur de $\mathrm{XA}-2$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc|l}
\mathrm{X}^6 & - & 2\mathrm{X}^5 & + & 2\mathrm{X}^4 & - & 2\mathrm{X}^3 & + & 2\mathrm{X}^2 & - & 2\mathrm{X} & + & 1 & \mathrm{X}^2+1\\
\hline
 & - & 2\mathrm{X}^5 & + & \mathrm{X}^4 & - & 2\mathrm{X}^3 & + & 2\mathrm{X}^2 & - & 2\mathrm{X} & + & 1 & \mathrm{X}^4-2\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2+1\\
 & & & & \mathrm{X}^4 & & & + & 2\mathrm{X}^2 & - & 2\mathrm{X} & + & 1 & \\
 & & & & & & & + & \mathrm{X}^2 & - & 2\mathrm{X} & + & 1 & \\
 & & & & & & & & & - & 2\mathrm{X} & & &
\end{array}$$

Donc $\mathrm{A}(\mathrm{X})=(\mathrm{X}^2+1)\mathrm{B}(\mathrm{X})-2\mathrm{X}$, où $\mathrm{B}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^4-2\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2+1$, donc le reste de la division euclidienne de A par X^2+1 est $-2\mathrm{X}$. Par ailleurs, $\mathrm{XA}(\mathrm{X})-2=\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)\mathrm{B}(\mathrm{X})-2\mathrm{X}^2-2=(\mathrm{X}^2+1)(\mathrm{XB}(\mathrm{X})-2)$, donc (X^2+1) divise le polynôme $\mathrm{XA}(\mathrm{X})-2$.

2. Rappeler la formule de Taylor en $a=1$ pour les polynômes de E.

Pour tout polynôme P de E, $\mathrm{P}=\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\frac{\mathrm{P}^{(k)}(1)}{k!}(\mathrm{X}-1)^k$.

3. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. En construire une base $\mathscr{B}$ à l'aide des puissances de $(\mathrm{X}-1)$.

— Le polynôme nul appartient à F.

— $\forall P, Q \in F$, $(P+Q)(1) = P(1)+Q(1) = 0$, $(P+Q)'(1) = P'(1)+Q'(1) = 0$, et $(P+Q)'''(1) - 6(P+Q)''(1) = P'''(1) - 6P''(1) + Q'''(1) - 6Q''(1) = 0$, donc $(P+Q) \in F$.

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall P \in F$, $(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = 0$, $(\lambda P)'(1) = \lambda P'(1) = 0$, et $(\lambda P)'''(1) - 6(\lambda P)''(1) = \lambda\left(P'''(1) - 6P''(1)\right) = 0$, donc $\lambda P \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.
Pour tout $P \in F$, la formule de Taylor donne :
$P = \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \dfrac{P'''(1)}{6}(X-1)^3 + \dfrac{P^{(4)}(1)}{24}(X-1)^4 + \dfrac{P^{(5)}(1)}{120}(X-1)^5 + \dfrac{P^{(6)}(1)}{720}(X-1)^6$,
or $P'''(1) = 6P''(1)$,
donc $P = P''(1)\left[\dfrac{1}{2}(X-1)^2 + (X-1)^3\right] + \dfrac{P^{(4)}(1)}{24}(X-1)^4 + \dfrac{P^{(5)}(1)}{120}(X-1)^5 + \dfrac{P^{(6)}(1)}{720}(X-1)^6$
Donc la famille $\left\{\dfrac{1}{2}(X-1)^2 + (X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5, (X-1)^6\right\}$ est une famille génératrice de F. Or cette famille est libre car les polynômes sont de degrés distincts deux à deux, donc c'est une base de F.

4. Montrer que $A \in F$.
$A'(X) = 6X^5 - 10X^4 + 8X^3 - 6X^2 + 4X - 2$, $A''(X) = 30X^4 - 40X^3 + 24X^2 - 12X + 4$,
et $A'''(X) = 120X^3 - 120X^2 + 48X - 12$.
Donc on a bien $A(1) = A'(1) = 0$ et $A'''(1) = 36 = 6A''(1)$, donc $A \in F$.
Nous voyons que 1 est racine de A de multiplicité $m = 2$, car $A(1) = A'(1) = 0$ et $A''(1) \neq 0$.

5. Déterminer le quotient Q de A par $(X-1)^m$.
D'abord $B(X) = X^2(X^2-2X+1)+1 = X^2(X-1)^2+1$, donc $A(X) = (X^2+1)\left(X^2(X-1)^2+1\right) - 2X = (X^2+1)X^2(X-1)^2 + X^2 + 1 - 2X = (X^2+1)X^2(X-1)^2 + (X-1)^2 = (X-1)^2\left(X^2(X^2+1)+1\right)$ donc $Q(X) = X^2(X^2+1)+1$, et le polynôme Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq 1$.

6. Factoriser Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
$Q(X) = X^4+X^2+1$. Le polynôme Y^2+Y+1 a pour racines j et j^2, donc $Q(X) = (X^2-j)(X^2-j^2)$.
Les deux racines carrées de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, donc $X^2 - j = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)$.
Par ailleurs $X^2 - j^2 = (X-j)(X+j) = \left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{5i\pi}{3}}\right)$.
Finalement, la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est $Q(X) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{5i\pi}{3}}\right)$, et le regroupement des racines conjuguées deux à deux donne la factorisation de Q dans $\mathbb{R}[x]$: $Q(X) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

7. En déduire la factorisation en produit de polynômes irréductibles de A dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
Dans $\mathbb{C}[X]$, $A(X) = (X-1)^2\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{5i\pi}{3}}\right)$,
et dans $\mathbb{R}[X]$, $A(X) = (X-1)^2(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$