DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Samedi 12 mars 2022

Durée totale : 2 heures

Exercice 1 8 points : 1) 0,5-1-1 2) 0,5-0,5-1-1-0,5 3) 1-0,5-0,5

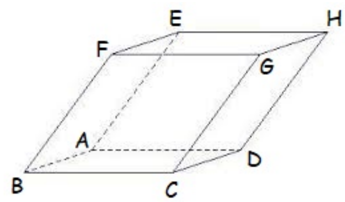
1. On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, un point qui M n'appartient pas à $\mathscr{C}$, et une droite (D) passant par M qui recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points distincts A et B.
   Enfin, on note I le milieu du segment [AB].
   (a) Faire une figure.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \mathrm{IA}^2$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{R}^2$, où R désigne le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
   On note dans la suite $p_{\mathscr{C}}(\mathrm{M})$ le nombre $\mathrm{OM}^2 - \mathrm{R}^2$, appelé « puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$ ».

Dans toute la suite, on ramène le plan à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

2. (a) Donner l'équation du cercle $\mathscr{C}$.
   (b) Soit $\mathrm{P}_\theta(\cos\theta, \sin\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathrm{P}_\theta \in \mathscr{C}$.
   (c) Montrer qu'une équation de la tangente T_θ à $\mathscr{C}$ passant par P_θ est :
   $$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$$
   (d) Donner les coordonnées du point d'intersection Q des droites $\mathrm{T}_{\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{T}_{-\frac{\pi}{2}}$.
   (e) Montrer que $p_{\mathscr{C}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{QP}_{-\frac{\pi}{2}}{}^2$.
3. On considère la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est un cercle dont on déterminera le rayon ρ et les coordonnées du centre Ω.
   (b) Montrer que l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ qui vérifient $p_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}) = p_{\mathscr{C}'}(\mathrm{M})$ est la droite (Δ) d'équation $6x + 2y - 7 = 0$.
   (c) Montrer que les droites $(\mathrm{O}\Omega)$ et (Δ) sont perpendiculaires.

Exercice 2 7 points : 1) 1 2) 1 3) 2 - 0,5 4) 1 - 1 - 0,5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le solide ABCDEFGH, appelé parallélépipède car ses six faces sont parallèles deux à deux.
On donne $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$, $D(3,-1,0)$ et $E(1,1,4)$.



1. Donner les coordonnées de F et de G.
2. Déterminer le volume du parallélépipède ABCDEFGH en unités de volume.
3. (a) Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique du plan (BEG).
   (b) La droite (FD) est-elle orthogonale au plans (BEG) ? Justifier.
4. (a) Donner la distance du point F au plan (BEG).
   (b) Déterminer l'aire du triangle BEG.
   (c) En déduire le volume de la pyramide FBEG.

Exercice 3 9 points : 1) 1,5 2) 0,5 3) 2 4) 1 5) 1,5 6) 1 7) 1,5

Notations : On pose $E = \mathbb{R}_6[X]$, $F = \left\{P \in E / P(1) = P'(1) = P'''(1) - 6P''(1) = 0\right\}$,
$A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$, et $B = X^2 + 1$.

1. Évaluer le reste R de la division euclidienne de A par B. Puis montrer que B est un facteur de $XA - 2$.
2. Rappeler la formule de Taylor en $a = 1$ pour les polynômes de E.
3. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. En construire une base $\mathscr{B}$ à l'aide des puissances de $(X-1)$.
4. Montrer que $A \in F$. En déduire que 1 est racine de A : quelle est sa multiplicité m ?
5. Déterminer le quotient Q de A par $(X-1)^m$. Le polynôme Q s'annule-t-il sur $\mathbb{R}$?
6. Factoriser Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
7. En déduire la factorisation en produit de polynômes irréductibles de A dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.