Devoir surveillé de Mathématiques n° 4 - 2 heures
Le samedi 6 Février 2021

Ce devoir est constitué de 2 exercices entièrement indépendants pouvant être traités dans un ordre quelconque. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n° 1 :

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

1. a) Vérifier que u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $u_0 = ln(2+\sqrt{3})$ (appliquer le changement de variable $t = sinx$).

c) Calculer u_1 .

2. a) Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x \, dx$ en fonction de n pour tout entier naturel n.

b) Exprimer alors $u_{n+2} - u_n$ en fonction de I_n puis de n.

c) En déduire les valeurs de u_2 et u_3 .

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) En déduire qu'elle est convergente.

4. a) Déterminer un réel $K \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin x \leq K$. (Justifier)

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$.

c) Obtenir finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Déduire de la question 4.b) que la suite (S_n) est majorée.

b) Pourquoi peut-on conclure que (S_n) est convergente?

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cosx\,(1-sinx)} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin^n x\, dx}{cosx\,(1-sinx)}$$

d) En déduire que (S_n) converge vers $S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$.

e) En effectuant le changement de variable $u = \sin x$ montrer que $S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)(1-u)}$.

f) Déterminer trois réels A,B,C tels que : $\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\frac{1}{(u-1)^2(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u-1)^2}$

g) En déduire la valeur de S.

Exercice n° 2 :

On note $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice Identité).

1. Vérifier que $M^2 = 3M - 2I$. En déduire que M est inversible, et donner M^{-1} (expliciter ses entrées).

2. Un premier calcul de M^n.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1}. [Le détail des calculs doit apparaître sur votre copie]
b) Vérifier que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.
c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $D^n = P^{-1}M^nP$.
d) En déduire l'expression de M^n pour tout n (expliciter ses 9 entrées).
e) L'expression précédente est-elle valable pour $n = -1$?

3. Un autre calcul de M^n.

a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple de réels (a_n, b_n) tel que : $M^n = a_n M + b_n I$
Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer, pour tout n, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$.
c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ les expressions de a_n, puis b_n, en fonction de n, et écrire l'expression détaillée de M^n (expliciter ses 9 entrées - On s'assurera de la cohérence avec sa réponse au **2d)**).

4. Une application
On considère les trois suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1, v_0 = -1, w_0 = 1$ et les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} à l'aide de M et X_n.

b) En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.