CONCOURS BLANC N° 1

Jeudi 6 janvier 2022

Durée totale : 4 heures

PARTIE ALGÈBRE

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1. Faire une figure et placer ces points.
2. Calculer $\dfrac{c-a}{d-a}$ et en déduire la nature du triangle ACD.
3. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 (11 points)

On s'intéresse dans cet exercice à trois suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} = -4a_n + 7b_n - 6c_n \\ c_{n+1} = -5a_n + 7b_n - 6c_n \end{cases}$$

avec les conditions initiales $a_0 = 2$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & -6 \\ -5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier l'égalité matricielle $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.

3. On considère la matrice P suivante :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer P^2.

(b) Déterminer deux nombres réels α et β tels que $P^2 = \alpha P + \beta I$, où I désigne la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de P et I.

4. (a) Montrer que $P^{-1}AP = T$, où $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) On note $N = T - I$. Calculer N^2 et N^3.

   (c) En déduire l'expression des coefficients de T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

   (b) En déduire l'expression des coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire les expressions explicites de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (4 points)

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\text{(E)} \qquad \overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer que pour toute solution z de (E), on a $|z| = 1$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

CB1 – Partie d'analyse - Jeudi 6 janvier 2022 **- PTSI1&2** du **Lycée Jean Perrin**

Soignez la rédaction et la présentation : vos raisonnements doivent être explicités et tout résultat proprement encadré ou souligné. ***L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.***

<u>Exercice n° 1 :</u> (2,5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Pour tout entier naturel *n*, exprimer u_n uniquement en fonction de n. (on vérifiera qu'u_4 est divisible par 7)
2. Montrer que u_n est, pour $n \geq 2$, un entier strictement positif.
3. Simplifier $u_{n+1} - 3u_n$ puis $u_{n+1} - 2u_n$.
4. En déduire, pour tout $n \geq 2$, le $PGCD(u_n, u_{n+1})$.

<u>Exercice n° 2 :</u> (8,5 points)

Première partie : étude d'une équation différentielle

1. On considère sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : $(E)\quad xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}$.

a) Écrire puis résoudre son équation homogène (H) associée.
b) Déterminer une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.
c) Donner la solution générale de l'équation (E) sur $]0,+\infty[$.

Deuxième partie : étude d'une solution

2. Soit $\varphi:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la solution de (E) définie par $\varphi(x) = x\, Arctan(x)$.

a) Sans calculs, en exploitant (E), étudier le signe de sa dérivée.
b) Construire son tableau de variations.
c) Montrer qu'elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
d) La bijection réciproque φ^{-1} est-elle dérivable sur J ?
e) Donner la valeur de $(\varphi^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
f) Notons C_φ le graphe de φ et Δ la droite d'équation y=x. Décrire les positions relatives de C_φ et Δ.

Troisième partie : suites définies par récurrence

3. Considérons, pour tout réel x, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = x$ et, pour tout n, la relation
$u_{n+1} = \varphi(u_n)$ où $\varphi(u) = u\, Arctan(u)$.

a) Démontrer par récurrence à l'aide du **2.**c) que, si $x > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes sont strictement positifs.
b) En s'aidant du **2.**f) décrire, en fonction de $x > 0$, la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Dire pour quelles valeurs de $x > 0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser alors sa limite. Que se passe-t-il en cas de divergence ?

Quatrième partie : sous-ensembles de réels

4. On pose $A(x) = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ et on continue à ne considérer que des réels $x > 0$. Lorsqu'ils existent, donner selon x, en justifiant vos réponses:

a) la borne inférieure de $A(x)$,
b) le plus petit élément de $A(x)$,
c) la borne supérieure de $A(x)$,
d) le plus grand élément de $A(x)$.

<u>**Exercice n° 3 :**</u> (9 points)

L'objet de ce problème est l'étude de la suite (S_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Première partie : Convergence de la suite.

1. <u>Analyse</u>
On considère la suite (T_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$par : $T_n = S_n + \frac{1}{n}$.
Montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge. On notera *S* sa limite.

2. <u>Approximation</u>

À partir de quel indice n peut-on avec certitude utiliser S_n comme approximation de S à 10^{-4} près ?

Deuxième partie : Détermination de *S*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos t)^{2n} dt$ et $K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$. On rappelle que $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$, et que, par convention, 0!=1.

1. Calculer I_0, J_0 puis K_0.
2. a) En notant que $(\cos t)^{2(n+1)} = (\cos t)^{2n+1} \cos t$, effectuer une intégration par parties sur I_{n+1}. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.
b) Vérifier alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
3. Soit $\boldsymbol{n \geq 1}$.

a) Afin d'intégrer 1 en t puis $2t$ en t^2 appliquer deux intégrations par parties successives à I_n pour démontrer que
$I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.
b) En déduire que : $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$.
c) Prouver que : $S_n = \frac{4}{\pi}(K_0 - K_n)$.
4. En admettant que $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

a) Montrer que, pour tout entier *n,* on a :
$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1})$ puis $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} I_n$ et finalement $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$

b) En déduire la valeur de *S*.