DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 Samedi 27 Novembre 2021

Durée : 2 heures

PARTIE I

Exercice 1 (3 points)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{3}$

   Le trinôme $2x^2+5x+2$ admet deux racines réelles -2 et $-\dfrac{1}{2}$

   donc $\dfrac{1}{2x^2+5x+2} = \dfrac{\lambda}{x+2} - \dfrac{\lambda}{x+\frac{1}{2}}$; on trouve $\lambda = -\dfrac{1}{3}$,

   donc $\mathrm{I} = -\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\left[\ln(x+2) - \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1$

   donc $\mathrm{I} = -\dfrac{1}{3}\left(\left(\ln 3 - \ln\dfrac{3}{2}\right) - \left(\ln 2 - \ln\dfrac{1}{2}\right)\right) = -\dfrac{1}{3}(\ln 2 - 2\ln 2) = \dfrac{\ln 2}{3}$

2. (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $\dfrac{2x^2}{1+x^2} = a + \dfrac{b}{1+x^2}$

   $\dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 - \dfrac{2}{1+x^2}$

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$

   On procède par IPP : $u'(x) = 1$, $u(x) = x$, $v(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

   $\mathrm{I} = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ donc, d'après a), $\mathrm{I} = \ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \left(2 - 2\times\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

   donc $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + 2\left[\arctan x\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2 (3 points)

1. Déterminer la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]1,+\infty[$ solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{1}{\ln x}$ sur I et telle que $f(2) = 1$.

   C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

   $a(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, donc $\mathrm{A}(x) = \ln(\ln x)$ et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y(x) = \mathrm{C}e^{-\ln(\ln x)} = \dfrac{\mathrm{C}}{\ln x}$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

   Appliquons la méthode de la variation de la constante :

$y'(x) = \dfrac{\mathrm{C}'(x)}{\ln x} + \mathrm{C}(x) \times \left(-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}\right) + \dfrac{1}{x \ln x} \times \dfrac{\mathrm{C}(x)}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln x} \Leftrightarrow \mathrm{C}'(x) = 1$
$\Leftrightarrow \mathrm{C}(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Donc $f(x) = \dfrac{x+k}{\ln x}$. Or $f(2) = 1 = \dfrac{2+k}{\ln 2}$, donc $k = \ln 2 - 2$,
et finalement $f(x) = \dfrac{x + \ln 2 - 2}{\ln x}$.

2. Déterminer la fonction g définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.
   L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et -2.
   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :
   $y(x) = \mathrm{A}e^{-x} + \mathrm{B}e^{-2x}$, avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$.
   $\lambda = -2$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x) = kxe^{-2x}$.
   On a $u'(x) = -2kxe^{-2x} + ke^{-2x}$ et $u''(x) = 4kxe^{-2x} - 4ke^{-2x}$,
   donc pour que $u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = 2e^{-2x}$, il faut choisir $k = -2$.
   Donc $u(x) = -2xe^{-2x}$ et $g(x) = \mathrm{A}e^{-x} + \mathrm{B}e^{-2x} - 2xe^{-2x}$.
   On a $g'(x) = -\mathrm{A}e^{-x} - 2\mathrm{B}e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$. Ainsi $g(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} = 2$ et $g'(0) = -\mathrm{A} - 2\mathrm{B} - 2 = 0$.
   On trouve $\mathrm{A} = 6$ et $\mathrm{B} = -4$, donc $g(x) = 6e^{-x} - 4e^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

Exercice 3 (4 points)

1. Montrer que l'expression $x^4 - 3x^2 + 2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et le calculer.
   On a $x^4 - 3x^2 + 2 = \left(x^2 - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$,
   donc $x^4 - 3x^2 + 2$ admet pour minimum $-\dfrac{1}{4}$ atteint pour $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|2x - 4| \leq |x - 1|$ (E).
   Sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, (E) $\Leftrightarrow -2x + 4 \leq -x + 1 \Leftrightarrow x \geq 3$
   Sur l'intervalle $[1, 2]$, (E) $\Leftrightarrow -2x + 4 \leq x - 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$
   Sur l'intervalle $[2, +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow 2x - 4 \leq x - 1 \Leftrightarrow x \leq 3$
   Finalement, $\mathscr{S} = \left[\dfrac{5}{3}, 3\right]$.

PARTIE II

Exercice 4 (2 points)

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-3)^{k+2} 5^{n-k-1} = \frac{9}{5}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^k 5^{n-k} - (-3)^n - 5^n\right] = \frac{9}{5}\left[2^n - (-3)^n - 5^n\right]$
2. $D_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right)$
$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}i^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)i\right) = -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice 5 (3 points)

$$(S_t)\begin{cases} x+y+z = 1-t \\ tx + (1+t)y + (1+t)z = t(1-t) \\ tx + (1-t)y + (1-t)z = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z & = 1-t & \\ y+z & = 0 & L_2 - tL_1 \to L_2 \\ (1-2t)y + (1-2t)z & = -t(1-2t) & L_3 - tL_1 \to L_3 \end{cases}$$

Si $t = \frac{1}{2}$, $(S_t) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = \frac{1}{2} \\ y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -z \end{cases}$. $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}, -z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$

Si $t \neq \frac{1}{2}$, $(S_t) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1-t \\ y+z = 0 \\ y+z = -t \end{cases}$

— si $t \neq 0$, $\mathscr{S} = \emptyset$

— si $t = 0$, $(S_t) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$. $\mathscr{S} = \{(1, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 6 (5 points)

On considère l'équation différentielle définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$:

(E) : $x\ln(x)y' - (3\ln(x)+1)y = x^3 \Leftrightarrow y' - \left(\frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)y = \frac{x^2}{\ln x}$

1. (H) : $y' - \left(\frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)y = 0$.
   $a(x) = -\left(\frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$, donc $A(x) = -3\ln x - \ln(\ln x)$, et les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{3\ln x + \ln(\ln x)} = Cx^3 \ln x$, avec $C \in \mathbb{R}$.
2. $u(x) = ax^n$, et $u'(x) = nax^{n-1}$
   donc u est une solution particulière de (E)

ssi $x\ln x \times nax^{n-1} - (3\ln x + 1) \times ax^n = x^3 \Leftrightarrow (n-3)ax^n \ln x - ax^n = x^3$.
On prend $a = -1$ et $n = 3$: la fonction $u : x \mapsto -x^3$ est une solution particulière de (E).

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto \mathrm{C}x^3 \ln x - x^3$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.