Durée : 2 heures

PARTIE I

Exercice 1 (4 points)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{3}$
2. (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $\dfrac{2x^2}{1+x^2} = a + \dfrac{b}{1+x^2}$

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 (4 points)

1. Déterminer la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]1, +\infty[$ solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{1}{\ln x}$ sur I et telle que $f(2) = 1$.
2. Déterminer la fonction g définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

Exercice 3 (2 points)

1. Montrer que l'expression $x^4 - 3x^2 + 2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et le calculer.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|2x-4| \leq |x-1|$.

PARTIE II

Exercice 4 (2 points)

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Calculer les sommes suivantes :

1. $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-3)^{k+2} 5^{n-k-1}$
2. $\mathrm{D}_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$, où $\min(i, j)$ représente le plus petit des deux indices i et j.

Exercice 5 (3 points)

En utilisant la méthode du pivot de Gauss et en discutant selon la valeur du paramètre réel t, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_t) :

$$(\mathrm{S}_t) \begin{cases} x + y + z = 1 - t \\ tx + (1+t)y + (1+t)z = t(1-t) \\ tx + (1-t)y + (1-t)z = t^2 \end{cases}$$

Exercice 6 (5 points)

On considère l'équation différentielle définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]1, +\infty[$:

$$x \ln(x) y' - (3 \ln(x) + 1) y = x^3 \quad (\mathrm{E})$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle (E).
2. Montrer qu'il existe un nombre réel a et un nombre entier n tels que la fonction u définie sur I par $u(x) = ax^n$ est une solution particulière de (E).
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).