Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

Devoir surveillé de Mathématiques n° 2 - 3 heures
Le samedi 23 Octobre 2021

Ce devoir est constitué de 7 exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque. Le barème détaillé est précisé. Soignez la rédaction et la présentation : vos raisonnements doivent être explicités et tout résultat proprement encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1: (2.5 pts : a) 1.5 **b)** 1**)**

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4(\cos^4 x + \sin^4 x) = 3 + \cos(4x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $4(\cos^4 x + \sin^4 x) = 7\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice n°2: **(2.5 pts : a)** 0.5 **b)** 1 **c)** 1 **)**

a) Déterminer les racines carrées de -3-4i.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2 - (4i + 1)Z + 3(i - 1) = 0$.

c) En déduire les solutions complexes de $z^8 - (4i + 1)z^4 + 3(i - 1) = 0$.

Exercice n°3: (2.25 pts : a) 0.75 **b)** 1.5**)**

a) Déterminer trois réels *a, b, c* tels que, pour tout réel *x* différent de 0, -1 et -2, on ait : $\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

b) En déduire, pour tout entier naturel *n* au moins égal à 2, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

.

Exercice n°4: (2.75 pts : 0.5 +3x0.75 **)**

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} 5.2^{2k-1} \quad ; \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}5^{n-k} \quad ; \quad C_n = \sum_{1\le i<j\le n} i\, j \quad ; \quad D_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$$

Exercice n°5: (2 pts : t≠-2 0.5 **t=-2** 1.5 **)**

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système (S_t) suivant ; on discutera selon la valeur du paramètre réel *t* :

$$(S_t)\begin{cases} x - 2y + 2z = t \\ x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

(<u>tuyau</u> : t=-2 est *valeur critique* du système. Il s'agit donc de le traiter pour t=-2 et t≠-2)

Exercice n°6: **(3.75 pts : 1)** 0.5+0.25 **2)** 0.5+0.25 **3)** 0.75 **4) a)** 0.5 **b)** 0.5+0.25 **5)** 0.25**)**

Soit f définie dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par : $f(z)=\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.

On note A le point d'affixe 1.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, |f(z)| = 1$. f est-elle surjective?

2. Résoudre l'équation : $f(z)=1$. f est-elle injective?

3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

4. a) Soit $\rho e^{i\varphi}$ la forme exponentielle de z-1 pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Montrer que $\mathrm{f(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\varphi+\pi)}$.

b) En déduire, pour tout θ réel, l'ensemble des antécédents de $e^{i\theta}$ par *f*. Retrouver ainsi $f^{-1}(\mathbb{R})$.

5. Quelle est donc son image $f(\mathbb{C}\backslash\{1\})$?

Exercice n°7: **(4.25 pts : 0) a)** 0.25 **b)** 0.25 **1) a)** 0.25 **b)** 0.5 **c)** 0.25 **d)** 0.75 **2) a)** 0.5 **b)** 0.5 **c)** 0.5 **d)** 0.5**)**

On considère la *tangente hyperbolique*, notée *th,* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}$$

0. a) Que valent $ch(x)-sh(x)$ et $ch(x)+sh(x)$ pour tout x?

b) Retrouver ainsi l'identité fondamentale $ch^2(x)-sh^2(x)=1$.

1. a) Montrer que *th* est une fonction impaire.

b) Déterminer sa fonction dérivée *th'* et dresser son tableau de variations (On donnera en particulier les limites de *th* en $\pm\infty$).

c) Montrer que *th* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I=\left]-1,1\right[$.

d) Déterminer explicitement sa bijection réciproque.

2. Soit maintenant la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\arccos(th(x))+\arctan(sh(x))$

a) Justifier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire une expression simplifiée de *f(x)*.

c) Résoudre l'équation : $th(x)=\dfrac{5}{13}$.

d) Déduire de ce qui précède que : $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)+\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.