DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Samedi 25 Septembre 2021

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1 (6 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$2\sin^2 x + 5\cos x = 4$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$1 + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$
3. (a) Écrire sous forme d'un produit l'expression $\cos x + \cos(3x)$.

   (b) Donner dans un tableau le signe de $\cos 2x$ en fonction des valeurs de x sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   (c) En déduire les solutions dans l'intervalle $[0, \pi]$ de l'inéquation :
$$\cos x + \cos(3x) \geq 0$$

Exercice 2 (4 points)

On cherche à résoudre l'équation :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (1+i)z + i = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Rechercher une solution de l'équation qui soit un nombre imaginaire pur de la forme ai avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer deux nombres réels b et c tels que :
$$z^3 + (1+i)z^2 + (1+i)z + i = (z - ai)\left(z^2 + bz + c\right)$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E), qui seront données sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

Exercice 3 (4 points)

Soit a un nombre complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

2. Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

Exercice 4 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Donner les équations des tangentes T_0 et T_1 à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 1.
4. La courbe de f admet-elle une asymptote ? Le cas échéant préciser son équation.
5. Tracer les deux tangentes T_0 et T_1 et la courbe de f.
6. Déterminer l'image J de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction f.
7. On note $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$, et g la fonction réciproque de $\tilde{f}$.
   Donner l'expression de $g(y)$ pour tout $y \in \mathrm{J}$.
8. Donner la valeur de $g'(0)$.