DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Lundi 17 mai 2021

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
   $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, les polynômes $P\left(\frac{X}{2}\right)$ et $P\left(\frac{X+1}{2}\right)$ sont de degré inférieur ou égal à 2, donc $f(P)$ est de degré inférieur ou égal à 2.
   • somme : $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P_1+P_2) = \frac{1}{2}\left[(P_1+P_2)\left(\frac{X}{2}\right) + (P_1+P_2)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[P_1\left(\frac{X}{2}\right) + P_1\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[P_2\left(\frac{X}{2}\right) + P_2\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = f(P_1) + f(P_2)$.
   • produit : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P) = \frac{1}{2}\left[(\lambda P)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \lambda \times \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \lambda f(P)$.
   Donc f est une application linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
   • somme : $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P_1+P_2) = (P_1+P_2)(1) = P_1(1) + P_2(1) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.
   • produit : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P) = (\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda\varphi(P)$.
   Donc φ est une application linéaire.
3. Déterminer l'image de la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par f.
   $f(1) = 1$, $f(X) = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{4}$ et $f(X^2) = \dfrac{1}{4}X^2 + \dfrac{1}{4}X + \dfrac{1}{8}$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
   Nous voyons que l'image d'une base est une base, car les trois polynômes sont de degrés distincts deux à deux. Donc l'endomorphisme f est bijectif : il est donc injectif et surjectif.
5. Déterminer une base de Ker φ. Quelle est la dimension de Ker φ ?
   $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P(1) = 0$. Or, d'après la formule de Taylor,
   $P = P(1) + P'(1)(X-1) + \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2$, donc $P = P'(1)(X-1) + \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2$,
   donc la famille $\left((X-1), (X-1)^2\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}\varphi$; or c'est une famille libre car les polynômes sont de degrés distincts, donc c'est une base de $\operatorname{Ker}\varphi$, qui est par conséquent de dimension 2.
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
   D'après la question précédente, φ n'est pas injective. Par ailleurs $\operatorname{Im}\varphi$ contient $\varphi(1) = 1$, donc $\operatorname{Im}\varphi$ contient $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$ donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$ et donc φ est surjective.

7. $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n : f^n(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right)$

   Initialisation : Pour $n=1$, on a bien $f(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+k}{2}\right)$

   Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $f^n(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right)$.

   Alors $f^{n+1}(\mathrm{P}) = f\big(f^n(\mathrm{P})\big) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\frac{\mathrm{X}}{2}+k}{2^n}\right) + \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\frac{\mathrm{X}+1}{2}+k}{2^n}\right)\right]$

   $= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+2k}{2^{n+1}}\right) + \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right] = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)$

   Conclusion : Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi\big(f^n(\mathrm{P})\big) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

   Sommes de Riemann : soit F une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

   Alors $\lim \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right) = \int_a^b \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t$.

   On a ici $\varphi\big(f^n(\mathrm{P})\big) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\dfrac{1+k}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} \mathrm{P}\left(\dfrac{k}{2^n}\right)$.

   En posant $\mathrm{N} = 2^n$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi\big(f^n(\mathrm{P})\big) = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}\left(\dfrac{k}{\mathrm{N}}\right) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
Si f appartient à E, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{I}_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_f(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Soit f une fonction appartenant à E.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$ car construites avec des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Donc $\mathrm{I}_f(x)$ et $\mathrm{J}_f(x)$ sont bien définis. Par conséquent les deux fonctions I_f et J_f sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I}_f(-x) = \mathrm{I}_f(x)$, et $\mathrm{J}_f(-x) = -\mathrm{J}_f(x)$, donc I_f est paire, et J_f est impaire.

3. On considère dans cette question la fonction p de E définie par $p(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

(a) Montrer que $\mathrm{I}_p(0) = \dfrac{1}{2}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{I}_p(x) = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.
$\mathrm{I}_p(0) = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{I}_p(x) = \displaystyle\int_0^1 t\cos(xt)\mathrm{d}t$
Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \cos(xt)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc par intégration par parties :
$= \left[t \times \dfrac{1}{x}\sin(xt)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\sin(xt)\mathrm{d}t = \frac{\sin x}{x} + \left[\frac{1}{x^2}\cos(xt)\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

(b) La fonction I_p est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
I_p est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car construite avec des fonctions usuelles continues. En 0 : $\lim \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} \sim -\dfrac{1}{2}$ donc $\lim \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \mathrm{I}_p(x) = \frac{1}{2} = \mathrm{I}_p(0)$ donc I_p est continue en 0. Donc I_p est continue sur $\mathbb{R}$.

4. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(a) Établir que : $\forall x > 0$, $\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x) = \dfrac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$.
$\forall x > 0$, $\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\big(\cos(xt) + i\sin(xt)\big)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$
Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{ixt}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc par intégration par parties :
$= \left[f(t) \times \dfrac{1}{ix}e^{ixt}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 f'(t) \times \frac{1}{ix}e^{ixt}\mathrm{d}t = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$.

(b) Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0,1]$.
f et f' sont bornée sur $[0,1]$ car ce sont des fonctions continues sur un segment.
On pose pour la suite : $\mathrm{M} = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\mathrm{M}' = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right|$.

(c) En déduire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0$, $\left|\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right| \leq \dfrac{\mathrm{A}}{x}$.
On a $\left|\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right| = \left|\dfrac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\mathrm{d}t\right|$,
donc $\left|\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right| \leq \dfrac{\left|f(1)e^{ix} - f(0)\right|}{x} + \dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int f'(t)e^{ixt}\mathrm{d}t\right|$, car $x > 0$,
donc $\left|\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right| \leq \dfrac{\left|f(1)\right| + \left|f(0)\right|}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$, car $\left|e^{ixt}\right| = 1$.
En posant $\mathrm{A} = \left|f(1)\right| + \left|f(0)\right| + \displaystyle\int_0^1 \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$, on a bien $\left|\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right| \leq \dfrac{\mathrm{A}}{x}$.

(d) Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{A}}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x) = 0$.
Donc les parties réelle et imaginaires tendent toutes les deux vers 0 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}_f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{J}_f(x) = 0$.

(e) Or I_f est une fonction paire donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{I}_f(x) = 0$, et J_f est une fonction impaire, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{J}_f(x) = 0$.

5. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.

   (a) Soient p et q deux réels. On a : $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

   (b) La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur l'intervalle $[0, u]$, de dérivée $x \mapsto \cos x$ dont la valeur absolue est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u) - \sin 0| \leq 1 \times |u - 0|$, donc $|\sin u| \leq |u|$.

   (c) Soient x et y deux réels. Établir que : $\left|\mathrm{I}_f(x) - \mathrm{I}_f(y)\right| \leq |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t$.

   $\left|\mathrm{I}_f(x) - \mathrm{I}_f(y)\right| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\big(\cos(xt) - \sin(xt)\big)\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t) 2\sin\left(\frac{xt+yt}{2}\right)\sin\left(\frac{xt-yt}{2}\right)\mathrm{d}t\right|$

   donc $\left|\mathrm{I}_f(x) - \mathrm{I}_f(y)\right| \leq 2\displaystyle\int_0^1 \left|f(t)\right| \times \left|\frac{(x-y)t}{2}\right| \mathrm{d}t$ donc $\left|\mathrm{I}_f(x) - \mathrm{I}_f(y)\right| \leq |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t$

   donc $\left|\mathrm{I}_f(x) - \mathrm{I}_f(y)\right| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{2}|x-y|$.

   (d) En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{y\to x} \mathrm{I}_f(y) - \mathrm{I}_f(x) = 0$,
   donc $\lim\limits_{y\to x} \mathrm{I}_f(y) = \mathrm{I}_f(x)$, donc la fonction I_f est continue en x.
   Donc la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.