DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Lundi 17 mai 2021

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1 (9 points)

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Déterminer l'image de la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par f.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
7. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

8. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,dt$$

Exercice 2 (11 points)

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
Si f appartient à E, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{I}_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_f(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Soit f une fonction appartenant à E.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $\mathrm{I}_f(x)$ et $\mathrm{J}_f(x)$ sont bien définis. On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f.
3. On considère dans cette question la fonction p de E définie par $p(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (a) Montrer que $\mathrm{I}_p(0) = \dfrac{1}{2}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{I}_p(x) = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.
   (b) La fonction I_p est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (a) Etablir que : $\forall x > 0$, $\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x) = \dfrac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_0^1 f'(t)e^{ixt}dt$.
   (b) Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0,1]$.
   On pose pour la suite : $\mathrm{M} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\mathrm{M}' = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right|$.
   (c) En déduire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0$, $\left|\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right| \leq \dfrac{\mathrm{A}}{x}$.
   (d) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{I}_f(x) + i\,\mathrm{J}_f(x)\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{I}_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{J}_f(x)$.
   (e) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{I}_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{J}_f(x)$.
5. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
   (b) Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).
   (c) Soient x et y deux réels. Etablir que : $\left|\mathrm{I}_f(x) - \mathrm{I}_f(y)\right| \leq |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (d) En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *mais ce n'est pas demandé ici.*