Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

Devoir surveillé de Mathématiques n° 7 - 3 heures
Le samedi 10 Avril 2021

Ce devoir est constitué de 3 exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque. Soignez la rédaction et la présentation : vos raisonnements doivent être explicités - tout résultat proprement encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n° 1

Considérons dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ les polynômes
$P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = X(1 + X^2)$ et $P_3 = (1 + X^2)^2$ ainsi que les ensembles
$F = Vect\{P_1, P_2, P_3\}$, $G = \{P \in E,\ (X^2 + 1)$ divise $P\}$ et $H = \{P \in E\ ,\ P(1) = P'(1) = P"(1) = 0\}$.

a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

b) Traduire algébriquement l'information : « $(X^2 + 1)$ divise P∈E ». Montrer que si la famille de polynômes $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est libre il en est de même de $\{(X^2 + 1)\ Q_1, (X^2 + 1)\ Q_2, (X^2 + 1)\ Q_3\}$.

c) En déduire que G est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

d) Expliquer pourquoi F = G.

e) Rappeler la formule de Taylor pour les polynômes.

f) Pourquoi H est également un sous-espace vectoriel de E? En donner une base et sa dimension.

g) Montrer que si $(X^2 + 1)$ divise $(X - 1)^3 A, A \in$ E alors $(X^2 + 1)$ divise A.

h) En déduire que G∩H se réduit au polynôme nul.

i) G et H sont-ils supplémentaires dans E ? Justifier votre réponse.

Exercice n° 2

On considère la fonction *f* définie pour tout *x* réel , par : $f(x) = exp(-\frac{x^2}{2})$.
On rappelle que $f^{(n)}$ désigne la dérivée *n*-ième de f et que par convention $f^{(0)} = f$.

1.
a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$ existe sur $\mathbb{R}$, et qu'il existe une fonction polynôme H_n (qu'on ne cherchera pas à déterminer) telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$.

b) Déduire du a) une expression de H_{n+1} en fonction de H_n et de $H_n{}'$.

c) Donner les expressions de H_0, H_1 et H_2.

2.
a) Énoncer la formule de Leibniz avec ses hypothèses d'application.

b) En notant que, pour tout x réel, on a l'identité : $f'(x) = -xf(x)$ et en lui appliquant judicieusement la formule de Leibniz démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x , on a :

$$H_{n+1}(x) - x\ H_n(x) + n\ H_{n-1}(x) = 0\ .$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la relation : $H_n{}' = nH_{n-1}$.

3.
a) Au regard du 1b) que conjecturez-vous en ce qui concerne le coefficient dominant et le degré de H_n ?

b) Vérifier par récurrence votre conjecture.

<u>Exercice n° 3</u>

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $t \neq 0, f(t) = \frac{Arctan\, t}{t}$.

a) Montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Rappeler le théorème fondamental de l'analyse.

c) Trouver deux constantes A et B telles que $\frac{1}{1+u^2} = A + B\frac{u^2}{1+u^2}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montrer alors que $Arctan\, t = t - R(t)$ où $R(t) = \int_0^t \frac{u^2}{1+u^2}du$. Quelle est la parité de R?
Justifier la majoration $|R(t)| \leq \frac{|t|^3}{3}, \forall t \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$.

e) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

f) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}du = -\frac{t^2}{2}f'(t)$ (on pourra éventuellement procéder par intégration par parties). En déduire le signe de f' en fonction de t.

g) Calculer la limite de f en +∞. Pourquoi peut-on en déduire sans calculs sa limite en -∞? Construire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

h) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 *cm*)

2. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(0) = 1$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que Φ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

b) En exploitant la positivité de l'intégrale montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \Phi(x) \leq 1$ (on pourra commencer par étudier le cas $x > 0$).

c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \Phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \Phi(x))$

d) En utilisant 1d) et 2b) montrer que Φ est dérivable en 0 avec $\Phi'(0) = 0$.

e) Encadrer $Arctan\, t$ pour tout $t \geq 0$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)dt = 0$. Puis donner, en la justifiant, la limite de Φ en $+\infty$.

f) Construire le tableau de variations de Φ.

g) Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ dans le même repère que celle de f.

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ (où Φ est l'application du 2.)

a) Montrer que : $\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. (On pourra utiliser 2.b) et 2.c)).

c) En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ (penser à 3a)), puis que cette inégalité reste vérifiée pour tout réel.

d) Justifier l'inégalité stricte $\Phi(x) > x$ pour tout $x<0$. Montrer alors que l'équation : $\Phi(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Nous noterons α cette solution. Montrer que $\alpha \in]0,1]$.

e) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

f) Montrer alors par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$.

g) Conclure que la suite (u_n) converge. Comment dépend sa limite de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$?