Devoir Surveillé n° 6

Samedi 13 mars 2021

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle du second ordre :

$$\text{(E)} \qquad x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$$

1. La fonction affine $f : x \mapsto x$ est solution de l'équation (E) car $f'(x) = 1$ et $f''(x) = 0$.
2. Étant données deux solutions u et v quelconques de l'équation (E),
   on note $\mathrm{W}(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$.
   Alors $\mathrm{W}'(x) = u'(x)v'(x) + u(x)v''(x) - u'(x)v'(x) - u''(x)v(x) = u(x)v''(x) - u''(x)v(x)$
   or $u''(x) = \dfrac{x(2+x)u'(x) - (x+2)u(x)}{x^2}$ et $v''(x) = \dfrac{x(2+x)v'(x) - (x+2)v(x)}{x^2}$
   donc $x\mathrm{W}'(x) = u(x)\dfrac{x(2+x)v'(x) - (x+2)v(x)}{x} - \dfrac{x(2+x)u'(x) - (x+2)u(x)}{x}v(x) = (2+x)\mathrm{W}(x)$
   donc la fonction W est solution de l'équation différentielle (F) : $xy' - (2+x)y = 0$.
3. (F) $\Leftrightarrow y' - \dfrac{2+x}{x}y = 0$. $a(x) = -\dfrac{2+x}{x} = -\dfrac{2}{x} - 1$ admet comme primitive $\mathrm{A}(x) = -2\ln x - x$.
   Donc les solutions de (F) sont les fonctions de la forme $y(x) = \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)} = \mathrm{C}e^{2\ln x + x} = \mathrm{C}x^2e^x$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
4. (a) En remplaçant la fonction v par la fonction $f : x \mapsto x$, on obtient $\mathrm{W}(x) = u(x) - xu'(x)$. Or nous avons trouvé que $\mathrm{W}(x)$ est de la forme $\mathrm{C}x^2e^x$, d'où $u(x) - xu'(x) = \mathrm{C}x^2e^x$, c'est-à-dire que la fonction u est solution de l'équation différentielle $xy' - y = -\mathrm{C}x^2e^x$.

   (b) (G) : $xy' - y = \alpha x^2e^x \Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{x}y = \alpha xe^x$.
   L'équation homogène est $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$. On a $a(x) = -\dfrac{1}{x}$, donc $\mathrm{A}(x) = -\ln x$ et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_0(x) = ke^{\ln x} = kx$, avec $k \in \mathbb{R}$.
   Variation de la constante : $y(x) = k(x) \times x$ est solution de (G) ssi $k'(x) \times x = \alpha xe^x \Leftrightarrow k'(x) = \alpha e^x \Leftrightarrow k(x) = \alpha e^x + k_0$, avec $k_0 \in \mathbb{R}$.
   Donc les solutions de l'équation différentielle (G) sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto (\alpha e^x + k_0)x$, avec $k_0 \in \mathbb{R}$.
5. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = xe^x$.

   (a) $g'(x) = (x+1)e^x$ et $g''(x) = (x+2)e^x$ donc
   $x^2g''(x) - x(x+2)g'(x) + (x+2)g(x) = x^2(x+2)e^x - x(x+2)(x+1)e^x + (x+2)xe^x = 0$
   donc g est solution de l'équation différentielle (E).

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$,
   donc on peut prolonger la fonction g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

6. (a) Pour tous $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$,
$x^2\big(\mathrm{A}f(x)+\mathrm{B}g(x)\big)'' - x(x+2)\big(\mathrm{A}f(x)+\mathrm{B}g(x)\big)' + (x+2)\big(\mathrm{A}f(x)+\mathrm{B}g(x)\big) =$
$\mathrm{A}\big(x^2f''(x)-x(x+2)f'(x)+(x+2)f(x)\big)+\mathrm{B}\big(x^2g''(x)-x(x+2)g'(x)+(x+2)g(x)\big)=0$,
donc les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{A}f(x)+\mathrm{B}g(x)$ sont des solutions de (E).

   (b) On cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = \mathrm{A}f(x)+\mathrm{B}g(x) = \mathrm{A}x+\mathrm{B}xe^x$.
On a $y_0'(x) = \mathrm{A}+\mathrm{B}(x+1)e^x$. Alors $y_0(1) = \mathrm{A}+\mathrm{B}e = 2-e$ et $y_0'(1) = \mathrm{A}+2\mathrm{B}e = 2-2e$.
On trouve $\mathrm{A}=2$ et $\mathrm{B}=-1$, donc $y_0(x) = 2x - xe^x$.

7. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $h(x) = 2x - xe^x$.

   (a) On a $h'(x) = 2-(x+1)e^x$ et $h''(x) = -(x+2)e^x$.
En particulier $h''(x) < 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, donc h' est strictement décroissante.

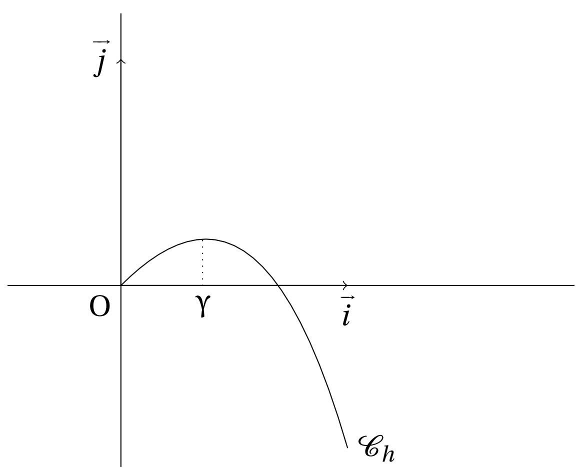
   — La fonction h' est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$,

   — elle est strictement décroissante sur cet intervalle,

   — $h'(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x) = -\infty$, donc $0 \in]-\infty, 1]$,

   donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h'(x) = 0$ possède une unique solution γ dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
Par ailleurs, $h'(1) = 2-2e < 0$ donc $\gamma \in [0,1]$.

   (b) D'après ce qui précède, h' est positive sur l'intervalle $[0,\gamma]$ et négative sur l'intervalle $[\gamma,+\infty[$, donc h est croissante sur l'intervalle $[0,\gamma]$ et décroissante sur l'intervalle $[\gamma,+\infty[$.



   (c) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x - \int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = \big[x^2\big]_0^1 - \big[xe^x\big]_0^1 + \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = 1-e+\big[e^x\big]_0^1$
$= 1-e+e-1 = 0$,
donc l'aire sous la courbe dans la partie positive égale l'aire au-dessus de la courbe dans la partie négative : elles se compensent.

Exercice 2

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet d'une structure métallique constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et passe au C avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau C, alors il y reste définitivement.

On note, pour tout entier naturel n, A_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n", B_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n". On note enfin C_n l'événement : "à l'instant n l'enfant est au sommet". On note a_n, b_n et c_n les probabiltés respectives de ces trois événements.

1. À l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A, donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.
   Par ailleurs, $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $b_1 = \dfrac{2}{3}$ et $c_1 = 0$.
2. Reformulons les données de l'énoncé : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$, et $p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{C}_{n+1}) = 0$, puis $p_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = 0$, $p_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$, et $p_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{C}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$, et enfin $p_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = 0$, $p_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = 0$, et $p_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{C}_{n+1}) = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements car l'enfant est nécessairement sur l'un des trois niveaux, et ne peut pas être sur deux niveaux simultanément. Donc, d'après la formule des probabilités totales,
   $a_{n+1} = p(\mathrm{A}_{n+1}) = p(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{A}_n) + p(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{B}_n) + p(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{C}_n) = p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})p(\mathrm{A}_n) + p_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})p(\mathrm{B}_n) + p_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1})p(\mathrm{C}_n) = \dfrac{1}{3}a_n$. De la même façon, $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n$.
3. (a_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n a_0 = \dfrac{1}{3^n}$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 3^n b_n$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3^{n+1} b_{n+1} = 3^{n+1}\left(\dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n\right) = 2 + 3^n b_n = v_n + 2$
   donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2,
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + 2n = 2n$.
   (b) Donc, pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{2n}{3^n}$.
5. (a) Pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ car c'est la probabilité que l'enfant se trouve à l'un des trois niveaux.
   (b) Donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{2n}{3^n}$.

(c) $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$; $\dfrac{n}{3^n} = ne^{-n\ln 3}$, donc, d'après le théorème de croissances comparées, $\lim \dfrac{n}{3^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.
La probabilité que l'enfant se trouve sur le niveau C à l'instant n tend vers 1.

6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}_n : X_n = A^n X_0$:
<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a bien $A^0 X_0 = I \times X_0 = X_0$.
<u>Hérédité</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $X_n = A^n X_0$.
Alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.
<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, on a $X_n = A^n X_0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(c) On sait que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc, puisque $X_n = A^n X_0$, les coefficients de la première colonne de la matrice A^n sont exactement les coefficients de X_n, soit $\begin{pmatrix} 1/3^n \\ 2n/3^n \\ 1-(2n+1)/3^n \end{pmatrix}$.

(d) On note $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $L \times A = L$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $LA^n = L$:
<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a bien $LA^0 = L \times I = L$.
<u>Hérédité</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $LA^n = L$. Alors $LA^{n+1} = LA^n A = LA = L$.
<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $LA^n = L$.

(e) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 20 & 26 & 27 \end{pmatrix}$

(f) On conjecture que pour tout entier naturel n, $A^n = \dfrac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 3^n - 2n - 1 & 3^n - 1 & 3^n \end{pmatrix}$.

Démontrons-le par récurrence :
<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, la propriété est vérifiée.

<u>Hérédité</u> : pour tout entier naturel n, on suppose que $A^n = \dfrac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 3^n - 2n - 1 & 3^n - 1 & 3^n \end{pmatrix}$.

Alors $A^{n+1} = A \times A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 3^n - 2n - 1 & 3^n - 1 & 3^n \end{pmatrix}$

donc $A^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 1 & 0 \\ 3^{n+1} - 2(n+1) - 1 & 3^{n+1} - 1 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.