DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Samedi 13 mars 2021

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle du second ordre :

$$(\mathrm{E}) \qquad x^2 y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$$

1. Déterminer une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$, avec $a \neq 0$, solution de l'équation (E).
2. Étant données deux solutions u et v quelconques de l'équation (E),
   on note $\mathrm{W}(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$.
   Montrer qu'alors W est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{F}) \qquad xy' - (2+x)y = 0$$

3. Résoudre l'équation différentielle (F).
4. (a) En reprenant les notations de la question 2, montrer que si l'on remplace la fonction v par la fonction f trouvée à la question 1, alors la fonction u est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$(\mathrm{G}) \qquad xy' - y = \alpha x^2 e^x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle (G).
5. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = xe^x$.
   (a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ et en déduire que g est une solution de l'équation (E).
   (b) Peut-on prolonger la fonction g par continuité en 0 ?
6. (a) Justifier que les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}g(x)$ sont des solutions de (E), où $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$, et f et g sont les fonctions respectivement des questions 1 et 5.
   (b) Déterminer une solution y_0 de (E) vérifiant les conditions initiales $y_0(1) = 2-e$ et $y_0'(1) = 2-2e$.
7. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $h(x) = 2x - xe^x$.
   (a) Montrer que l'équation $h'(x) = 0$ possède une unique solution γ dans l'intervalle $[0,+\infty[$, puis justifier que $\gamma \in [0,1]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction h, et tracer la courbe représentative de la fonction h sur l'intervalle $[0,1]$ (unité 3 cm).
   (c) Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 2

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet d'une structure métallique constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au C avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau C, alors il y reste définitivement.

On note, pour tout entier naturel n, A_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n", B_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n". On note enfin C_n l'événement : "à l'instant n l'enfant est au sommet". On note a_n, b_n et c_n les probabiltés respectives de ces trois événements.

1. Que valent a_0, b_0 et c_0 ? Calculer les probabilités a_1, b_1 et c_1.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \ ; \ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n.$$

3. Donner l'expression de a_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 3^n b_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de b_n en fonction de n.
5. (a) Pour tout entier naturel n, quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?
   (b) En déduire une expression de c_n en fonction de l'entier n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Comment interpréter le résultat ?
6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice A qui vérifie : $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire, en utilisant les résultats des questions précédentes, les expressions des coefficients de la première colonne de la matrice A^n en fonction de n.
   (d) On note $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $L \times A = L$ et en déduire que $L \times A^n = L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Calculer A^2 et A^3.
   (f) Utiliser l'ensemble des résultats précédents pour conjecturer l'expression générale des coefficients de la matrice A^n en fonction de n, et enfin démontrer cette conjecture.