PARTIE I

Exercice 1

On note $\mathscr{P}$ le plan complexe. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z(1-z) \end{cases}$$

On note $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z associe le point $F(M)$ d'affixe $f(z)$.
On note I le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

1. Quels sont les points fixes de F (c'est-à-dire les points $M \in \mathscr{P}$ tels que $F(M) = M$) ?
   $f(z) = z \Leftrightarrow z(1-2z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \frac{1}{2}$
   Donc les points fixes de F sont les deux points du plan d'affixes 0 et $\frac{1}{2}$.
2. Quels sont les points ayant pour image par F le point A d'affixe -4 ?
   $f(z) = -4 \Leftrightarrow 2z^2 - 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-2) = 0$
   Les points ayant pour image par F le point A sont les deux points d'affixes -1 et 2.
3. Quels sont les points ayant pour image par F le point B d'affixe $2+2i$?
   $f(z) = 2+2i \Leftrightarrow 2z^2 - 2z + 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 + i = 0$
   $\Delta = -3 - 4i = (\alpha + i\beta)^2$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   $$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ 2\alpha\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^4 + 3\alpha^2 - 4 = 0 \\ \beta = -\dfrac{2}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 4) = 0 \\ \beta = -\dfrac{2}{\alpha} \end{cases}$$
   donc on peut choisir $\alpha = 1$ et donc $\beta = -2$: on a bien $\Delta = (1-2i)^2$.
   Donc les deux solutions sont : $z_1 = \dfrac{1-(1-2i)}{2} = i$ et $z_2 = \dfrac{1+(1-2i)}{2} = 1 - i$.
   Donc les points ayant pour image par F le point B d'affixe $2+2i$ sont les deux points d'affixes respectives i et $1-i$.
4. Soient M_1 et M_2 deux points distincts d'affixes respectives z_1 et z_2.
   $F(M_1) = F(M_2) \Leftrightarrow 2z_1(1-z_1) = 2z_2(1-z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_1^2 = z_2 - z_2^2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) \Leftrightarrow$ $z_1 + z_2 = 1$ car $z_1 - z_2 \neq 0$.
   Or I est le milieu du segment $[M_1M_2]$ si et seulement si $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 1$.
   Donc $F(M_1) = F(M_2)$ si et seulement si I est le milieu du segment $[M_1M_2]$.
5. Étudier l'injectivité de l'application F.
   Nous avons vu que les points d'affixes -1 et 2 ont la même image par F, donc F n'est pas injective.

6. Démontrer que F est surjective.
   Pour tout point M du plan, on note Ω son affixe.
   L'équation $2z(1-z)=\Omega$ est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, donc elle admet au moins une solution. Donc M admet au moins un antécédent par F. Donc F est surjective.
7. Déterminer les points $M \in \mathscr{P}$ ayant exactement un antécédent par F.
   Reprenons l'équation précédente $2z(1-z)=\Omega \Leftrightarrow 2z^2-2z+\Omega=0$.
   $\Delta = 4-8\Omega$. L'équation admet une unique solution ssi $\Delta = 0$, ssi $\Omega = \dfrac{1}{2}$.
   Le seul point ayant exactement un antécédent par F est le point I d'affixe $\dfrac{1}{2}$.
8. Soit $\theta \in [0,\pi]$.
   $f\left(e^{i\theta}\right) = 2e^{i\theta}\left(1-e^{i\theta}\right) = 2e^{i\theta}\left(-2i\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 4\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$.
   Or $\theta \in [0,\pi]$, donc $\sin\dfrac{\theta}{2} \geq 0$.
   Donc $f\left(e^{i\theta}\right)$ a pour module $4\sin\dfrac{\theta}{2}$ et pour argument $\dfrac{3\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pour tout entier naturel non nul n.

On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ et $\ln(1+x) \leq x$.
   Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x)-x$.
   On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}-1+x = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$,
   donc $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$ donc $f(x) \geq 0$.
   De même, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}-1 = -\dfrac{x}{1+x} \leq 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$,
   donc $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$ donc $g(x) \leq 0$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n}$. De même $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}\right) = \dfrac{(n+1)}{2n}-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln V_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.
   Or pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, $\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^2} \leq \ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right) \leq \dfrac{k}{n^2}$ d'après la question 2.
   Donc par somme : $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^2} \leq \ln V_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}$

Donc $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln(V_n) \leq \dfrac{n+1}{2n}$

5. $\lim \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0$,
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim \left(\ln V_n\right) = \dfrac{1}{2}$, donc enfin $\lim V_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et :

- $\mathscr{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;
- $\mathscr{D}$ la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = 1 \end{array} \right.$;
- $\mathscr{L}$ le plan d'équation $y + z = 0$;
- pour tout réel m, $\mathscr{P}_m$ le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. (a) $\overrightarrow{n_m} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}_m$.

   (b) A$(1, 0, 0)$ est un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

   (c) Vérifier que tous les plans $\mathscr{P}_m$ contiennent la droite $\mathscr{D}$.
   Tout point M de $\mathscr{D}$ a des coordonnées de la forme $(1, y, y)$, avec $y \in \mathbb{R}$, coordonnées qui vérifient l'équation du plan $\mathscr{P}_m$ quelle que soit la valeur de m. Donc tous les plans $\mathscr{P}_m$ contiennent la droite $\mathscr{D}$.

2. (a) $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{r_m} \begin{pmatrix} 2m \\ -1-m \\ 1-m \end{pmatrix}$.
   Nous voyons que $\overrightarrow{r_m}$ n'est jamais nul, donc $\overrightarrow{n_m}$ et $\vec{a}$ ne sont jamais colinéaires, donc $\mathscr{D}'$ n'est jamais orthogonale à $\mathscr{P}_m$.

   (b) $\mathscr{R}_m$ contient le point O et admet pour vecteur normal $\overrightarrow{r_m}$.
   Donc une équation cartésienne de $\mathscr{R}_m$ est : $2mx - (1+m)y + (1-m)z = 0$.

3. Pour tout réel m, les coordonnées de I_m point d'intersection des plans $\mathscr{P}_m, \mathscr{L}$ et $\mathscr{R}_m$ sont solution du système :
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & - & mz & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ 2mx & - & (m+1)y & + & (1-m)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & - & mz & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & - & (2m^2+m+1)y & + & (1-m+2m^2)z & = & -2m \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2m\mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & - & mz & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & & (4m^2+2)z & = & -2m \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + (2m^2+m+1)\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

Donc $z = -\dfrac{m}{2m^2+1}$, $y = \dfrac{m}{2m^2+1}$ et $x = 1-2m\dfrac{m}{2m^2+1} = \dfrac{1}{2m^2+1}$.

$\mathrm{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{2m^2+1}, \dfrac{m}{2m^2+1}, -\dfrac{m}{2m^2+1}\right)\right\}$: ce sont les coordonnées du point I_m.

4. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2 = x$. Préciser la nature géométrique de $\mathscr{S}$ ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.

   $x^2+y^2+z^2 = x \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{4}$

   Donc $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

5. Vérifier que I_m appartient à $\mathscr{S}$ puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

   $\left(\dfrac{1}{2m^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2m^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2m^2+1}\right)^2 = \dfrac{1+2m^2}{(2m^2+1)^2} = \dfrac{1}{2m^2+1}$

   donc les coordonnées de I_m vérifient l'équation de $\mathscr{S}$, donc $\mathrm{I}_m \in \mathscr{S}$.

   Par ailleurs, I_m appartient au plan $\mathscr{L}$.

   Donc I_m appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$ dans le plan $\mathscr{L}$.

6. (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ par lesquels passe un et un seul plan $\mathscr{P}_m$.

   Par un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ ne passe qu'un seul plan $\mathscr{P}_m$ ssi l'équation $x + my - mz = 1$ d'inconnue m admet exactement une solution. Or $x+my-mz = 1 \Leftrightarrow (y-z)m = 1-x$: c'est le cas si et seulement si $y - z \neq 0$, et alors $m = \dfrac{1-x}{y-z}$.

   Donc les points de $\mathscr{E}$ par lesquels ne passe qu'un seul plan $\mathscr{P}_m$ sont tous les points qui n'appartiennent pas au plan d'équation $y = z$.

   (b) Quelle est la réunion des plans $\mathscr{P}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

   Reprenons l'équation précédente lorsque $y - z = 0$:

   si $x = 1$, tous les plans $\mathscr{P}_m$ passent par M et si $x \neq 1$, aucun plan $\mathscr{P}_m$ ne passe par M.

   Donc la réunion des plans $\mathscr{P}_m$ est l'ensemble de tous les points de $\mathscr{E}$ sauf les point du plan d'équation $y = z$ privé de la droite $\mathscr{D}$.