Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Ce sujet comporte deux parties, qui doivent être traitées sur des copies distinctes.

PARTIE I

Exercice 1

On note $\mathscr{P}$ le plan complexe. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z(1-z) \end{cases}$$

On note $\mathrm{F} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ d'affixe z associe le point $\mathrm{F}(\mathrm{M})$ d'affixe $f(z)$.
On note I le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$.

1. Quels sont les points fixes de F (c'est-à-dire les points $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ tels que $\mathrm{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$) ?
2. Quels sont les points ayant pour image par F le point A d'affixe -4?
3. Quels sont les points ayant pour image par F le point B d'affixe $2+2i$?
4. Soient M_1 et M_2 deux points distincts d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Montrer que $\mathrm{F}(\mathrm{M}_1) = \mathrm{F}(\mathrm{M}_2)$ si et seulement si I est le milieu du segment $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$.
5. Étudier l'injectivité de l'application F.
6. Démontrer que F est surjective.
7. Déterminer les points $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ ayant exactement un antécédent par F.
8. Soit $\theta \in [0, \pi]$. Calculer le module et un argument de $f\left(e^{i\theta}\right)$.

Exercice 2

1. Donner, sans justification, une expression simplifiée des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, pour tout entier naturel non nul n.

On considère la suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{V}_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ et $\ln(1+x) \leq x$ (on pourra à chaque fois étudier les variations puis le signe d'une fonction bien choisie).
3. Donner une expression simple des sommes suivantes : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}$; $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^2}{2n^4}\right)$.

4. Déduire des deux questions précédentes l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln(\mathrm{V}_n) \leq \frac{n+1}{2n}$$

5. Déduire enfin la limite de la suite (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et :

- $\mathscr{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;
- $\mathscr{D}$ la droite d'équation $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$;
- $\mathscr{L}$ le plan d'équation $y + z = 0$;
- pour tout réel m, $\mathscr{P}_m$ le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. (a) Donner un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathscr{P}_m$.
   (b) Donner un point et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
   (c) Vérifier que tous les plans $\mathscr{P}_m$ contiennent la droite $\mathscr{D}$.
2. (a) Calculer $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a}$. En déduire que $\mathscr{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathscr{P}_m$.
   (b) On appelle alors $\mathscr{R}_m$ l'unique plan contenant $\mathscr{D}'$ et perpendiculaire à $\mathscr{P}_m$. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{R}_m$.
3. Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées de I_m point d'intersection des plans $\mathscr{P}_m$, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{R}_m$.
4. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$. Préciser la nature géométrique de $\mathscr{S}$ ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.
5. Vérifier que I_m appartient à $\mathscr{S}$ puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
6. (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ par lesquels passe un et un seul plan $\mathscr{P}_m$.
   (b) Quelle est la réunion des plans $\mathscr{P}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

PARTIE II

Exercice 4

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre dans $\mathbb{R}^3$, pour tout couple (a, b) de réels, le système suivant :
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + (2-a)z = b - 3 \end{cases}$$
On prendra soin de préciser pour quelles valeurs du couple (a, b) :
   i) le système n'a pas de solution ;
   ii) le système a une unique solution : expliciter cette solution ;
   iii) le système admet une droite de solutions : la présenter par un point et un vecteur directeur ;
   iv) le système admet un plan de solutions : en donner une équation cartésienne.
2. Donner le rang du système en fonction des valeurs de (a, b).

Exercice 5

1. (a) Donner la définition de la fonction Arctangente et expliquer pourquoi on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan\big(\arctan(x)\big) = x$.
   (b) Que vaut $\arctan(1)$?
   (c) Montrer que : $\forall A, B \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

2. Montrer avec rigueur que :
$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{y - x}{1 + xy}\right)$$
3. En déduire une expression simplifiée de la somme :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2k+1}{1 + k^2(k+1)^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
4. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 6

Soit f la fonction de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \left(\operatorname{sh}(x)\right)^2 + \operatorname{sh}(x) + 1$$

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2\operatorname{sh}(x) + 1 \geq 0$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) = 0$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
2. (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier.
   (b) Écrire f comme la composée $\mathrm{P} \circ h$ d'une fonction polynôme P de degré 2 et d'une fonction standard h que l'on précisera.
3. Mettre $\mathrm{P}(x)$ sous la forme canonique $(x+a)^2 + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. En déduire l'image de f.
4. (a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f en x.
   (b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant votre réponse.
   (c) Construire le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées à la question précédente ainsi que le(s) extremum(s) de f.
5. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
6. Trouver le plus grand nombre réel α tel que f restreinte à l'intervalle $]-\infty, \alpha]$ réalise une bijection sur son image. Précisez alors l'ensemble de définition de sa fonction réciproque.
7. Calculer la dérivée de cette réciproque en 1.