Exercice 1 (3 points)

Résoudre le système suivant, avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (a+2)x+b(a+2)y+(a+2)z=b+2 & L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3 \\ x+aby+z=b & \\ x+by+az=1 & \end{array}\right.$$

Si $a=-2$: Si $b \neq -2$, alors $\mathscr{S}=\emptyset$.

$$\text{Si } b=-2,\ (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+4y+z=-2 & \\ -6y-3z=3 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+4y+z=-2 & \\ y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} & L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x \quad -z=-4 & \\ y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} & L_1 \leftarrow L_1-4L_2 \end{array}\right.$$

On a une droite de solutions passant par le point $(-4, \frac{1}{2}, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathscr{S}=\left\{\left(-4+z, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$.

$$\text{Si } a \neq -2,\ (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+by+z=\frac{b+2}{a+2} \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{a+2}L_1 \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+by+z=\frac{b+2}{a+2} & \\ (a-1)by=\frac{ba+b-2}{a+2} & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ (a-1)z=\frac{a-b}{a+2} & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right.$$

Si $a=1$: si $b=1$, alors (S) $\Leftrightarrow x+y+z=1$. On a un plan de solutions d'équation $x+y+z=1$.
$\mathscr{S}=\left\{(1-y-z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\right\}$.
si $b \neq 1$, $\mathscr{S}=\emptyset$.

Si $a \neq 1$: si $b \neq 0$, on a une unique solution. $\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ba+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)\right\}$

si $b=0$, $\mathscr{S}=\emptyset$.

Exercice 2 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x)=-f(x)$ donc f est paire.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ donc f est périodique de période 2π.
2. À quel intervalle minimal peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
   On peut réduire l'étude de la fonction f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ car elle est $2\pi-$périodique, puis à l'intervalle $[0, \pi]$ car elle est également paire.
3. Étudier les variations de f sur cet intervalle.

   $f'(x)=\cos x+\cos(2x)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$.

   Sur l'intervalle $[0, \pi]$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, et $\frac{3x}{2}$ varie de 0 à $\frac{3\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{3x}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

4. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
   Le maximum est $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et le minimum est $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 3 (4 points)

On note th la fonction d'expression $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ et on pose : $g(x) = x\,\text{th}(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de th et vérifier qu'il suffit d'étudier g sur $\mathbb{R}_+$.
   Les fonction ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}\, x \geq 1$,
   donc th est définie sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $g(-x) = -x\,\text{th}(-x) = g(x)$, donc la fonction g est paire, donc on peut l'étudier seulement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) < 1$ et $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > -e^{-x}$ donc $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, donc $\text{ch}\, x > \text{sh}\, x$, donc $\text{th}\, x < 1$.
   Par ailleurs, $\text{th}'(x) = \dfrac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$.
3. Déterminer les variations de g.
   $g'(x) = \text{th}\, x + x(1 - \text{th}^2 x)$
   or sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $\text{th}\, x \geq 0$, $x \geq 0$ et enfin $1 - \text{th}^2 x > 0$ car $\text{th}^x < 1$,
   par conséquent $g'(x) \geq 0$, donc g est croissante sur $[0, +\infty[$.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
   or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}\, x = 1$
   Par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 0$. Qu'en déduit-on pour $\mathscr{C}_g$?
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) - x = x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - x = \dfrac{-2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ d'après le théorème de croissance comparée,
   et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 0$.
   Donc la courbe de g admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ en $+\infty$.

Exercice 4 (2 points)

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Montrons que f injective $\Rightarrow$ f surjective :
Supposons que f est injective.
$\forall y \in \mathrm{E}$, on a $f\big(f \circ f(y)\big) = f(y)$ donc $f \circ f(y) = y$, donc y admet un antécédent par f (c'est $f(y)$).
Donc f est surjective.

Montrons que f surjective $\Rightarrow$ f injective :
Supposons que f est surjective.
Alors $\forall x, x' \in \mathrm{E}$, tels que $f(x) = f(x')$, $\exists a, a' \in \mathrm{E}$, $x = f(a)$ et $x' = f(a')$
donc $f\big(f(a)\big) = f\big(f(a')\big)$ donc $f \circ f \circ f(a) = f \circ f \circ f(a)$ donc $f(a) = f(a')$ donc $x = x'$.
Donc f est surjective.

Exercice 5 (3 points)

Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et prouver le résultat par un raisonnement par récurrence :

a) $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$;
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}_n$: « $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ ».
<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = xe^x$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie,
c'est-à-dire que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.
On dérive : $f^{(n+1)}(x) = (x+n)e^x + e^x = (x+n+1)e^x$
donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

b) $f(x) = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}_n$: « $f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)e^x$ ».
<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = x^2e^x$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie,
c'est-à-dire que $f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)e^x$.
On dérive : $f^{(n+1)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)e^x + \big(2x + 2n\big)e^x = \big(x^2 + 2(n+1)x + (n+1)n\big)e^x$
donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)e^x$.