Devoir Surveillé n° 3 — Samedi 05 décembre 2020

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1 (5 points)

À tout nombre complexe non nul z, on associe, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives : $a = z$, $b = \overline{z}$ et $c = \dfrac{z^2}{\overline{z}}$.

1. On note r et θ le module et un argument de z.
   Exprimer un argument de b et un argument de c.
2. Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient distincts deux à deux?
   Dans la suite de cet exercice, on supposera la condition réalisée.
3. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
4. Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique du point B, puis du point C. Réaliser cette construction à partir d'un point quelconque A du plan.
5. Montrer que AB = AC.
6. On pose $Z = \dfrac{a-c}{b-c}$.
   (a) Montrer que $Z = \dfrac{e^{i\theta}}{2\cos\theta}$.
   (b) Résoudre alors $|Z| = 1$.
   (c) En déduire l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 2 (3 points)

Résoudre le système suivant, avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$$

Exercice 3 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. À quel intervalle minimal peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Étudier les variations de f sur cet intervalle.
4. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (4 points)

On note th la fonction d'expression $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ et on pose : $g(x) = x\,\mathrm{th}(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de th et vérifier qu'il suffit d'étudier g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) < 1$ et $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.
3. Déterminer les variations de g.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x) = 0$. Qu'en déduit-on pour $\mathscr{C}_g$?

Exercice 5 (2 points)

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 6 (3 points)

Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et prouver le résultat par un raisonnement par récurrence :

a) $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$; b) $f(x) = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.