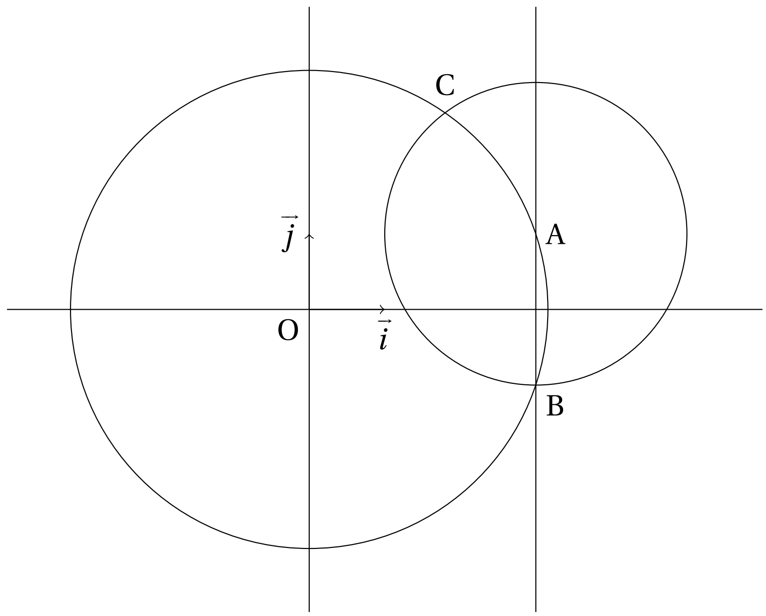
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 — Samedi 14 Novembre 2020

Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

À tout nombre complexe non nul z, on associe, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives : $a = z$, $b = \bar{z}$ et $c = \dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

1. On note r et θ le module et un argument de z.
   $\arg b = -\theta$ et $\arg c = \arg z^2 - \arg \bar{z} = 2\theta + \theta = 3\theta$.
2. Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient distincts deux à deux?
   A est distinct de B ssi $z \neq \bar{z}$ ssi $z \notin \mathbb{R}$.
   Pour que C soit distinct de A et de B, il suffit que $\theta \neq 3\theta\,[2\pi]$ et $-\theta \neq 3\theta\,[2\pi]$, c'est-à-dire que $\theta \neq 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire que z ne soit ni réel ni imaginaire pur. Les nombres réels ayant déjà été écartés, il reste à examiner les cas où le nombre complexe z est imaginaire pur.
   Dans ce cas on pose $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$. Alors $\dfrac{z^2}{\bar{z}} = -iy = \bar{z}$ donc B et C sont confondus.
   Finalement, les trois points A, B et C sont deux à deux distinct ssi z n'est ni réel ni imaginaire pur.
3. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   $|z| = |\bar{z}|$ et $\left|\dfrac{z^2}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z|$ donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $|z|$.
4. Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique du point B, puis du point C. Réaliser cette construction à partir d'un point quelconque A du plan.
   On trace la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A. Elle recoupe cet axe au point H. On trace le cercle de centre H passant par A, il recoupe la perpendiculaire en B. On trace ensuite le cercle de centre O passant par A. On trace le cercle de centre A passant par B, il recoupe le cercle précédent en C.
5. Montrer que AB = AC.
   $AB = |\bar{z} - z|$ et $AC = \left|\dfrac{z^2}{\bar{z}} - z\right| = \left|\dfrac{z^2 - z\bar{z}}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|z(z-\bar{z})|}{|\bar{z}|} = \dfrac{|z| \times |z-\bar{z}|}{|z|} = |z - \bar{z}|$.
   Donc AB = AC.
6. On pose $Z = \dfrac{a-c}{b-c}$.
   (a) $Z = \dfrac{z - \dfrac{z^2}{\bar{z}}}{\bar{z} - \dfrac{z^2}{\bar{z}}} = \dfrac{z\bar{z} - z^2}{\bar{z}^2 - z^2} = \dfrac{z(\bar{z} - z)}{(\bar{z} - z)(\bar{z} + z)} = \dfrac{z}{\bar{z} + z} = \dfrac{z}{2\mathrm{Re}\, z} = \dfrac{re^{i\theta}}{2r\cos\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{2\cos\theta}$
   (b) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{e^{i\theta}}{2\cos\theta}\right| = 1 \Leftrightarrow |\cos\theta| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$



$\Leftrightarrow \theta \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(c) L'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral est donc la réunion des deux droites passant par l'origine qui font un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses, privées de l'origine.

Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ les points $A(2,1,2)$, $B(-2,1,4)$, $C(-2,3,-4)$, et $D(3,0,8)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\\-6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les points A, B, et C ne sont pas alignés.

2. Donner une équation du plan (ABC). Le point D appartient-il à ce plan ?
   $M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right] = 0 \Leftrightarrow -4(x-2) - 32(y-1) - 8(z-2) = 0$
   $\Leftrightarrow x - 2 + 8(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 2z - 14 = 0$: c'est l'équation du plan (ABC)
   Les coordonnées de D ne vérifient pas cette équation donc $D \notin (ABC)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J, K respectivement milieux des segments [BC], [AC] et [AB].
   $I(-2,2,0)$, $J(0,2,-1)$ et $K(0,1,3)$.

4. Donner les coordonnées des points A′, B′, C′ respectivement symétriques du point D par rapport à I, J et K.
   $\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \overrightarrow{\mathrm{IA'}}$ donc $\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_D = -7 \\ y_{A'} = 2y_I - y_D = 4 \\ z_{A'} = 2z_I - z_D = -8 \end{cases}$, donc $A'(-7, 4, -8)$
   De même $B'(-3, 4, -10)$ et $C'(-3, 2, -2)$.

5. Montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes.
   $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}\begin{pmatrix}-9\\3\\-10\end{pmatrix}$ donc la droite (AA′) a pour équation $\begin{cases} x = 2 - 9t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - 10t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$
   $\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\begin{pmatrix}-1\\3\\-14\end{pmatrix}$ donc la droite (BB′) a pour équation $\begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4 - 14\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
   $\overrightarrow{\mathrm{CC'}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc la droite (CC′) a pour équation $\begin{cases} x = -2 - \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = -4 + 2\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
   Pour trouver un éventuel point d'intersection entre les droites (AA′) et (BB′), on résout $\begin{cases} 2 - 9t = -2 - \lambda \\ 1 + 3t = 1 + 3\lambda \\ 2 - 10t = 4 - 14\lambda \end{cases}$. On trouve $\lambda = t = \dfrac{1}{2}$, donc les droites sont sécantes au point de coordonnées $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}, -3\right)$. Ce point appartient également à la droite (CC′) pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
   Donc les trois droites sont concourantes.

Exercice 3 (3 points)

Pour chacune des applications suivantes, indiquer en justifiant votre réponse si elle est ou non surjective, injective, bijective.

1. L'application f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(n) = |n - 10|$.
   L'application n'est pas injective car $f(9) = f(11) = 1$.
   L'application est surjective car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n = f(n + 10)$.
2. L'application g définie de $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.
   L'application n'est pas injective car $g(2) = g(-1) = 0$.
   L'application est surjective : $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2 - x - 2} = y \Leftrightarrow x^2 - x - 2 - y^2 = 0$ (car $y \geq 0$).
   Le discriminant est $\Delta = 1 + 4(2 + y^2) > 0$ donc l'équation admet deux solutions,
   donc y possède deux antécédents.
3. L'application h définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par $h(n) = \left\lfloor \dfrac{3}{2}n \right\rfloor$.
   L'application n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent :
   en effet, $\left\lfloor \dfrac{3}{2}n \right\rfloor = 2 \Leftrightarrow 2 \leq \dfrac{3}{2}n < 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} \leq n < 2$ ce qui est impossible car $n \in \mathbb{Z}$.

L'application est injective car $h(n) = h(n') \Rightarrow \left|\dfrac{3}{2}n - \dfrac{3}{2}n'\right| < 1 \Rightarrow |n-n'| < \dfrac{2}{3} \Rightarrow n = n'$

Exercice 4 (4 points)

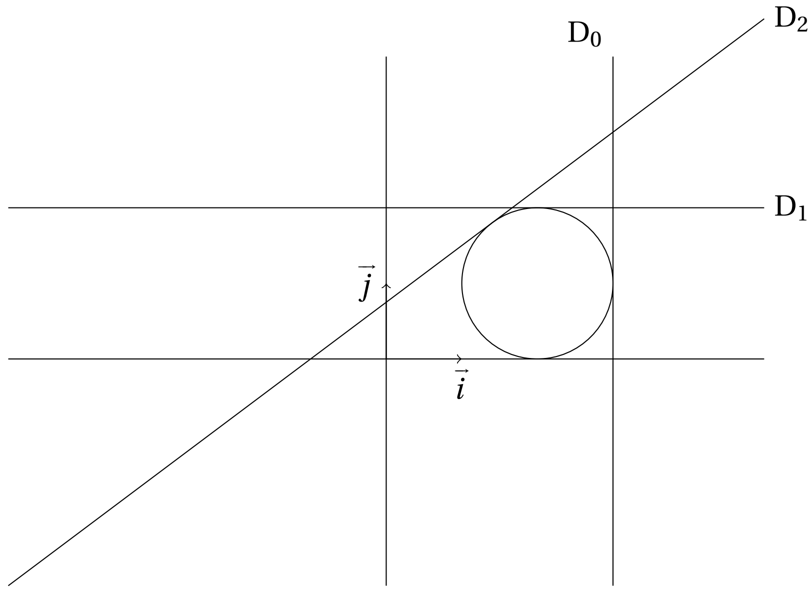
1. Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On pose $a = 2n^3 + n^2 + 2n + 5$ et $b = n^2 + 1$.
   (a) Montrer que $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,4)$.
   On a $a = 2n(n^2+1) + n^2 + 1 + 4 = (2n+1)(n^2+1) + 4 = (2n+1)b + 4$.
   Donc les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs communs de b et 4.
   Donc $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,4)$.
   (b) Déterminer alors ce PGCD en distinguant les cas n pair et n impair.
   Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4. Si n est pair, alors n^2 est pair et n^2+1 est impair donc $\text{PGCD}(n^2+1,4) = 1$.
   Si n est impair, notons $n = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$: alors $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ qui est un multiple de 2 mais pas de 4, donc $\text{PGCD}(n^2+1,4) = 2$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$:
   à gauche : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} - 2n < 1 \Leftrightarrow 4n(n+1) < (2n+1)^2$
   $\Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ donc c'est vrai.
   à droite : $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Leftrightarrow 1 < 2n - 2\sqrt{n(n-1)} \Leftrightarrow 4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1$
   (b) Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{10\,000} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{10\,000} \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$
   donc $\displaystyle\sqrt{10\,001} - \sqrt{1} < \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{10\,000}$
   or $\sqrt{10\,000} = 100$ et $\sqrt{10\,001} - 1 > 99$ car $\sqrt{10\,001} > 100$,
   donc la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ est 99.

Exercice 5 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour tout nombre réel a, on considère la droite D_a dont une équation est :

$$(1-a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$$

1. $1 - a^2$ et $2a$ ne sont jamais simultanément nuls, par conséquent cette équation est bien celle d'une droite pour tout nombre réel a.
2. Tracer les droites D_0, D_1 et D_2 en prenant pour unité 1 cm.



3. Un point $M(x,y)$ appartient à une droite D_a si et seulement si l'équation d'inconnue a : $(1-a^2)x+2ay+(a^2-2a-3)=0$ admet au moins une solution.
   On l'écrit $(1-x)a^2+(2y-2)a+x-3=0$.
   <u>si $x=1$</u> :
   l'équation devient $(2y-2)a=2$ qui possède une solution pour tout $y\neq 1$.
   <u>si $x\neq 1$</u> :
   $\Delta=(2y-2)^2-4(1-x)(x-3)=4\big((y-1)^2-(1-x)(x-3)\big)=4\big((y-1)^2+x^2-4x+3\big)$
   donc $\Delta=4\big((x-2)^2+(y-1)^2-1\big)$.
   Donc $M(x,y)$ appartient à au moins une droite D_a si et seulement si $(x-2)^2+(y-1)^2\geq 1$ et $(x,y)\neq(1,1)$.
4. Quel est l'ensemble des points M du plan par lesquels passe au moins une droite D_a ?
   L'ensemble de ces points est le plan privé de l'intérieur strict du cercle de centre $I(2,1)$ et de rayon 1 ainsi que du point de coordonnées $(1,1)$.
5. y a-t-il une droite D_a perpendiculaire à la droite D_2 ? Justifier votre réponse.
   Un vecteur normal de D_a est $\overrightarrow{n_a}\begin{pmatrix}1-a^2\\2a\end{pmatrix}$, et un vecteur normal de D_2 est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
   Donc D_a et D_2 perpendiculaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_a}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow -3(1-a^2)+4\times 2a=0 \Leftrightarrow 3a^2+8a-3=0$.
   Cette équation du second degré possède un discriminant positif, donc oui, il y a au moins une droite D_a perpendiculaire à D_2. En poussant le calcul, on en trouve deux, D_{-3} et $D_{\frac{1}{3}}$.