DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Samedi 14 Novembre 2020

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1 (5 points)

À tout nombre complexe non nul z, on associe, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives : $a = z$, $b = \overline{z}$ et $c = \dfrac{z^2}{\overline{z}}$.

1. On note r et θ le module et un argument de z.
   Exprimer un argument de b et un argument de c.
2. Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient distincts deux à deux ?
   Dans la suite de cet exercice, on supposera la condition réalisée.
3. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
4. Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique du point B, puis du point C. Réaliser cette construction à partir d'un point quelconque A du plan.
5. Montrer que AB = AC.
6. On pose $Z = \dfrac{a-c}{b-c}$.
   (a) Montrer que $Z = \dfrac{e^{i\theta}}{2\cos\theta}$.
   (b) Résoudre alors $|Z| = 1$.
   (c) En déduire l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points $A(2,1,2)$, $B(-2,1,4)$, $C(-2,3,-4)$, et $D(3,0,8)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Donner une équation du plan (ABC). Le point D appartient-il à ce plan ?
3. Donner les coordonnées des points I, J, K respectivement milieux des segments [BC], [AC] et [AB].
4. Donner les coordonnées des points A′, B′, C′ respectivement symétriques du point D par rapport à I, J et K.
5. Montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes.

Exercice 3 (3 points)

Pour chacune des applications suivantes, indiquer en justifiant votre réponse si elle est ou non surjective, injective, bijective.

1. L'application f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(n) = |n-10|$.
2. L'application g définie de $]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x^2-x-2}$.
3. L'application h définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par $h(n) = \left\lfloor \dfrac{3}{2}n \right\rfloor$.

Exercice 4 (4 points)

1. Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On pose $a = 2n^3 + n^2 + 2n + 5$ et $b = n^2 + 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, 4)$.
   (b) Déterminer alors ce PGCD en distinguant les cas n pair et n impair.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
   (b) En déduire la partie entière de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}}$

Exercice 5 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour tout nombre réel a, on considère la droite D_a dont une équation est :

$$(1-a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$$

1. Justifier que cette équation est celle d'une droite pour tout nombre réel a.
2. Tracer les droites D_0, D_1 et D_2 en prenant pour unité 1 cm.
3. Montrer qu'un point $\mathrm{M}(x, y)$ appartient à une droite D_a si et seulement si :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad (x, y) \neq (1, 1)$$

4. Quel est l'ensemble des points M du plan par lesquels passe au moins une droite D_a ?
5. y a-t-il une droite D_a perpendiculaire à la droite D_2 ? Justifier votre réponse.