Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Ce sujet comporte deux parties, qui doivent être traitées sur des copies distinctes.

PARTIE I

Exercice 1 (15 points)

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. (a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
   (b) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $D' = D \cup \{0\}$. On précisera $f(0)$ et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu.
   (c) Justifier que f est dérivable sur D et calculer f' sur D.
2. (a) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
   (b) Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D'.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.
   (d) Montrer en détaillant le raisonnement que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.
   (e) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, ainsi que l'équation d'une asymptote à $\mathscr{C}_f$.
3. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Tracer l'allure de la courbe de f, en faisant apparaître une tangente et deux asymptotes de celle-ci.
4. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions polynomiales P_n et Q_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$$

5. (a) Préciser pourquoi l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est bien définie.
   (b) En utilisant le graphique de la question 3b, donner un encadrement de L entre deux entiers consécutifs.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \mathrm{P}_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

   Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad \mathrm{R}_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

   (e) Établir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   (f) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $\mathrm{Q}'_n(x)$ et $\frac{\mathrm{P}_n(x)}{x}$.
   (g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note g_n l'application définie par : $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = \mathrm{Q}'_n(x) - f(x)$.
   Justifier que g_n est continue sur $[0,1]$ puis montrer que : $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Q}_n(1) - \mathrm{L}$.
   (h) Montrer, en utilisant entre autres 5d et 5e, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \left|g_n(x)\right| \leq \frac{x^n}{n+1}$.
   (i) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\mathrm{Q}_n(1) - \mathrm{L}| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Q}_n(1)$.
   (j) Déterminer un entier naturel N tel que $\mathrm{Q}_\mathrm{N}(1)$ approche L à 10^{-4} près.

Exercice 2 (6 points)

Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, réalisant ainsi une succession de n tirages. Pour tout i entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon. On pose alors, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Z}_p = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{X}_i$.

1. Que représente Z_p, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi de Z_2.
4. Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$.
   (a) Quel est l'ensemble $\mathrm{Z}_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?
   (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathrm{Z}_p(\Omega)$, la valeur de $\mathrm{P}_{(\mathrm{Z}_p=k)}\left(\mathrm{X}_{p+1}=1\right)$.
   (c) En déduire que : $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{p+1}=1\right) = \frac{1+c\mathrm{E}(\mathrm{Z}_p)}{2+pc}$.
5. Montrer par récurrence forte que pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, X_p a même loi que X_1.

PTSI 2020/2021

Concours blanc n° 2 – PARTIE 2
Jeudi 17 Juin 2021

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Barème de cette seconde partie : Ex1 : 7 points – **Ex2 :** 5.5 points – **Ex3 :** 7.5 points

Exercice n° 1 : (géométrie plane autour d'un triangle)

A- Étude d'un cas particulier – géométrie plane cartésienne

On munit le plan du repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de son orientation usuelle. Considérons le triangle ABC direct où B s'identifie à l'origine des coordonnées (B=O) et A et C sont les points de coordonnées soit (6,0) soit (10,12).

1. Représenter ces données sur une figure en précisant les coordonnées de A et C
2. Évaluer les distances AC, BC donner les coordonnées du milieu M de [AB] et calculer l'aire du triangle ABC.
3. Construire une équation paramétrique pour la médiatrice de [AC] ainsi que pour la médiatrice de [BC]
4. Trouver les coordonnées des points S_1 et S_2 faisant de BS_1CS_2 un carré direct de diagonale BC.
5. Trouver également les points R_1 et R_2 faisant de CR_1AR_2 un carré direct de diagonale AC.
6. Représenter les points A, B, C, M, S_1, R_1 sur une même figure en vérifiant que son triangle R_1MS_1 est bien direct.
7. Démontrer finalement que le triangle R_1MS_1 est isocèle et rectangle en M.

B- Généralisation – géométrie plane avec les complexes

Considérons maintenant un triangle ABC direct quelconque du plan complexe. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARC et BSC isocèles et rectangles respectivement en R et S. On note M le milieu de [AB]. Pour tout point P du plan z_P désigne comme d'habitude son affixe.

1. Exprimer z_M en fonction de z_A et z_B.
2. Montrer que PQR est un triangle direct isocèle et rectangle en Q si et seulement si $z_P-z_Q=i(z_R-z_Q)$.
3. En déduire z_R et z_S en fonction de z_A, z_B et z_C.
4. Exploiter les questions précédentes pour prouver que RMS est systématiquement un triangle direct isocèle et rectangle en M.

Exercice n° 2 : (endomorphisme et calcul algébrique)

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que si :

$P(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, alors par définition $P(X+1)=a_0+a_1(X+1)+\ldots+a_n(X+1)^n$.

On pose par ailleurs, pour tout entier naturel N : $S_N(P)=\sum_{k=0}^{N}P(2k+1)$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par : $f(P) = Q$ où $Q(X) = P(X+1) - P(X-1)$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer le degré de $f(X^i)$ pour $1 \leq i \leq n$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Déterminer $Ker(f)$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(P) = Q$. Exprimer très simplement $S_N(Q)$ en fonction de P.

4. On suppose désormais que $n = 3$, et on considère les polynômes suivants :

$$N_0 = 1; \quad N_1 = \frac{X}{2}; \quad N_2 = \frac{(X-1)(X+1)}{4}; \quad N_3 = \frac{(X-1)X(X+1)}{6} \quad .$$

a) Montrer que $B = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminer les images de ces quatre vecteurs par f.

b) Résoudre l'équation : $f(P) = aX^2 + bX + c$, où *a,b,c* sont trois réels donnés.

c) Que valent $S_0(X(X-1))$ et $S_0(X(X+2))$? Déduire de **4b**) une expression simplifiée des sommes :

$$S_N(X(X-1)) = 3 \times 2 + 5 \times 4 + 7 \times 6 + \ldots + (2N+1)(2N)$$

$$S_N(X(X+2)) = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \ldots + (2N+1)(2N+3)$$

<u>Exercice n° 3 :</u> (algèbre matricielle)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Partie 1</u> :

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.
On fera apparaître sur sa copie la méthode utilisée et les calculs intermédiaires.

2. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = \lambda_2 I + \mu_2 A$, où λ_2 et μ_2 sont deux réels que l'on précisera.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels λ_n et μ_n tels que

$A^n = \lambda_n I + \mu_n A$; exprimer λ_{n+1} et μ_{n+1} en fonction de λ_n et μ_n

4. Déterminer une relation liant μ_{n+1}, μ_n et μ_{n-1}. En déduire λ_n et μ_n en fonction de *n*.

5. Quelles sont donc les 9 entrées de A^n? (écrire la matrice correspondante avec ses entrées simplifiées)

Partie 2 :

Soit $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer le produit $(A+I)(A-2I)$.

En déduire de nouveau que A est inversible et retrouver la valeur de A^{-1}.

2. Calculer $(A+I)^2$ et $(A-2I)^2$.

En déduire une expression simple de $(A+I)^n$ et $(A-2I)^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $M(a,b)$ s'écrit de façon unique sous la forme $M(a,b)=c(A+I)+d(A-2I)$, où c et d sont deux réels que l'on exprimera en fonction de a et b.

4. En déduire $(M(a,b))^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Quel résultat obtient-on pour $(a,b)=(0,1)$?