Exercice 1 : Pseudo-inverse d'une application linéaire

Dans tout l'exercice, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est pseudo-inversible s'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

- $g \circ f \circ g = g$
- $f \circ g \circ f = f$
- $f \circ g = g \circ f$

L'application g est alors appelée pseudo-inverse de f.

On considère l'application $f : (x, y, z) \longmapsto (x+y, 2x+3y+z, 3x+5y+2z)$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer le noyau et l'image de f, et donner une base de chaque.
   Pour le noyau, on résout le système :
   $\begin{cases} x+y \quad = 0 \\ 2x+3y+z = 0 \\ 3x+5y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \quad = 0 \\ y+z \quad = 0 \\ 2y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Par le théorème du rang, f est de rang 2, donc une base de $\mathrm{Im}\, f$ est formée des deux premières colonnes de la matrice A qui forment deux vecteurs non colinéaires.
3. On note $\mathscr{B}$ la famille constituée des trois vecteurs $e_1 = (0,1,2)$, $e_2 = (1,2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Nous considérons la matrice P formée des coordonnées des trois vecteurs :
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   La matrice P est inversible, donc les trois vecteurs forment une base.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$, et calculer son inverse P^{-1}.
   On poursuit le pivot de Gauss :
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tfrac{1}{4}\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{4}\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathrm{Im}\, f$ car ce sont des colonnes de A.
   Ils forment une famille libre car ils ne sont pas proportionnels.
   Or $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$,
   donc (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
6. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}$.
   $A' = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \end{pmatrix}$
   $= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 20 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. Vous avez dû trouver à la question précédente un résultat sous la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On note pour cette question $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Vérifier que M est inversible et donner son inverse $N = \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{pmatrix}$.
   $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $N = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
8. Vérifier que la matrice $B' = \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta & 0 \\ \eta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est le pseudo-inverse de la matrice A'.
   $B' = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $B'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'B'$, et $A'B'A' = B'$ et $B'A'B' = A'$.
9. En déduire le pseudo-inverse B de la matrice A en fonction de B' et de P, puis explicitement.
   $B = PB'P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \left(-\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   $= -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 12 & -12 \\ -12 & -8 & 4 \\ -48 & -28 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : un problème de tirages

Dans tout cet exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

— Si k est égal à 1, on arrête les tirages.

— Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

— On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n.

Cas particuliers

1. Que sont les ensembles des valeurs prises par X_1 et X_2 respectivement notés $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$? Justifier.
   Pour $n = 1$, il n'y a qu'une boule dans l'urne, tirée nécessairement dès de premier tirage, donc $X_1(\Omega) = \{1\}$. Pour $n = 2$, il y a deux boules dans l'urne, ou bien on tire la boule n°1 en première, ou bien on tire d'abord la boule n°2 puis la boule n°1, donc $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
2. Quelle est la loi de X_1 ?
   X_1 est une variable aléatoire constante égale à 1.
3. (a) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Déterminer $P(X_2 = 1)$.
   $(X_2 = 1)$ est l'évènement « on tire d'abord la boule n°1 parmi 2 boules ». $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$

   (b) Déterminer la loi de X_2.

x	1	2
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_2.
   $E(X_2) = \dfrac{3}{2}$ et $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Cas général

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**. On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par I_n, noté $I_n(\Omega)$, et donner la loi de I_n.
   $I_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et I_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

2. Justifier que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Il y a n boules dans l'urne : on peut tirer la boule n°1 au premier tirage, auquel cas $X_n = 1$, comme on peut la tirer à chacun des tirages suivants, jusqu'au n-ième inclus, dans le cas où l'on tire les boules dans l'ordre décroissant, la n-ième, puis la $(n-1)$-ième, etc., jusqu'à la n°1 en dernier.

3. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
$P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{n!}$

4. Justifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$
Pour $j \leq k$, $(I_n = k)$ signifie que l'on a tiré la boule n°k en premier. Il reste donc les boules n°1 à n°$(k-1)$ dans l'urne, c'est-à-dire $(k-1)$ boules. La probabilité d'obtenir la boule n°1 au j-ième tirage, étant donné qu'un tirage a déjà eu lieu, est alors $P(X_{k-1} = j-1)$.
Donc $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$.
Pour $j > k$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc l'égalité reste valable.

5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $j \geq 2$, on a $P(X_n = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$.
Les évènements $\{(I_n = k)\}_{1 \leq k \leq n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j | I_n = k) P(I_n = k)$$
$$= P(X_n = j | I_n = 1) P(I_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n = j | I_n = k) \times \frac{1}{n}$$
$$= 0 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(X_{k-1} = j-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1).$$

6. Démontrer que, pour tout $j \geq 2$, on a $P(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$
D'après la question précédente, on a $nP(X_n = j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$ et de la même façon,
$(n-1)P(X_{n-1} = j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1)$,
donc $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$.
Donc, en divisant par n, $P(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$.

7. (a) Démontrer que $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.
$$E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} j P(X_n = j) = \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n} j \left(\frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) \right)$$

$= \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \dfrac{1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1})$
$= \dfrac{1}{n} + \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1})$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Montrons par récurrence que la propriétés $\mathscr{P}_n$: $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ est vraie pour tout $n \geq 1$:
Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = 1$, et pour $n = 2$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2) = \dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}$.
Hérédité :
soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 2. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
D'après 7.a), $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n1+}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) + \dfrac{1}{n+1}$ et par hypothèse de récurrence, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$,
donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à un.

Problème

Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$,
   donc $\forall k \geq 2$, $\forall x \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{x}$, donc $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
   de même $\forall x \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$, donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\ln(n+1) \leq \mathrm{H}_n \leq 1 + \ln(n)$.
   On somme l'inégalité précédente : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$,
   donc $\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
   donc $\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq \mathrm{H}_n \leq \ln n + 1$, donc $\ln(n+1) \leq \mathrm{H}_n \leq \ln n + 1$, car $-\ln 2 + 1 \geq 0$.
3. À l'aide de la relation précédente :
   (a) Démontrer que la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
   Or $\lim \ln(n+1) = +\infty$, donc par comparaison $\lim \mathrm{H}_n = +\infty$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{H}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   On a, pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \dfrac{\mathrm{H}_n}{\leq} 1 + \dfrac{1}{\ln n}$
   or $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}$, donc $\lim \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim \dfrac{\mathrm{H}_n}{\ln n} = 1$, donc $\mathrm{H}_n \sim \ln n$.
4. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n), \qquad v_n = \mathrm{H}_n - \ln(n+1)$$

   (a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
   $u_{n+1} - u_n = \mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \leq 0$ d'après la question 1.
   $v_{n+1} - v_n = \mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \geq 0$ d'après la question 1.

Enfin, $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to 0$
donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Par conséquent ces deux suites convergent. On note γ leur limite commune.
D'après la question 2, $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc par passage à la limite, $\gamma \geq 0$.

5. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $0 \leq \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
(u_n) est décroissante et tend vers γ, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \gamma$, donc $\mathrm{H}_n - \ln n \geq \gamma$.
D'autre part, (v_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma$, donc $\mathrm{H}_n - \ln(n+1) \leq \gamma$, donc $\mathrm{H}_n - \ln n - \gamma \leq \ln(n+1) - \ln n$.
Finalement, $0 \leq \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(b) Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ϵ strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ϵ près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

```
def gamma(e)
    H=1
    n=1
    while math.log(1+1/n)>e:
        n+=1
        H=H+1/n
    return H-math.log(n)
```

Partie B : Le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$ par

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier la convergence de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$.
La série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, avec $2 > 1$, donc la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

7. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
$\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$ et $k-1 < k$, donc $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{k^2}$.

8. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.
   On somme cette inégalité : $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, donc $\mathrm{B}_n - 1 \leq 1 - \dfrac{1}{n}$ (somme télescopique), donc $\mathrm{B}_n \leq 2$.

9. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0,\pi]$, on pose $\mathrm{D}_n(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0,\pi]$, $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \mathrm{D}_n(t)$.
   $\mathrm{D}_n(t) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-ikt} + e^{ikt}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.
   (b) En déduire que, si $t \in]0,\pi]$, $\mathrm{D}_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
   $$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-\left(e^{it}\right)^{2n+1}}{1-e^{it}} \text{ (progression géométrique)}$$
   donc $\mathrm{D}_n(t) = \dfrac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}} \times \dfrac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \dfrac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$
   (c) Calculer la valeur de $\mathrm{D}_n(0)$.
   $\mathrm{D}_n(0) = 2n+1$.

10. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par
   $$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin t} \text{ si } t > 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$
   (a) Démontrer que f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   f est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions continues.
   En 0 : $\dfrac{t}{\sin t} \sim 1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0+} f(t) = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.
   Finalement, f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Démontrer que f est dérivable en 0.
   f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions dérivables.
   Pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}$,
   or $\sin t - t\cos t \underset{0}{=} t + \dfrac{t^3}{6} - t\left(1 - \dfrac{t^2}{2}\right) + o(t^3) = \dfrac{2}{3}t^3 + o(t^3)$,
   donc $\dfrac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{3}t$, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0+} f'(t) = 0$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

(c) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Nous venons de voir que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0, donc finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

$\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\mathrm{d}t$

et $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(kt)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi = -\frac{1}{k^2}$

donc $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\mathrm{B}_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\mathrm{D}_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t$

Donc $\displaystyle\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\mathrm{D}_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t$

(c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$

(d) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t$.

D'après b), $\displaystyle\mathrm{B}_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{6}$.

(e) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

En faisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{2}t$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$ et

$\displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2u - \frac{4u^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(2u)2\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{2u}{\pi}\right)2u\frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{\sin u}\mathrm{d}u$

donc $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

12. Déterminer g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ telle que $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

On prend bien sûr $g(t) = \dfrac{t}{\sin t}\left(2 - \dfrac{2t}{\pi}\right)$: g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f de la question 10, et une fonction affine.

13. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = \left[-g(t)\dfrac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\dfrac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$

$= \dfrac{1}{2n+1}g(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\dfrac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$

or la fonction g' étant continue sur l'intervalle fermé borné $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, elle atteint ses bornes,

donc $\exists \mathrm{M}\in\mathbb{R}_+$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $|g'(t)|\leq \mathrm{M}$, donc $\left|g'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\right|\leq \mathrm{M}$,

et donc $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\dfrac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{2n+1}\times\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$.

14. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$.

On en déduit que $\lim \mathrm{B}_n = \dfrac{\pi^2}{6}$!