ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

— Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.

— Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.

— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Le sujet est composé de 2 exercices et d'un problème entièrement indépendants les uns des autres.

Exercice 1 : Pseudo-inverse d'une application linéaire

Dans tout l'exercice, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est pseudo-inversible s'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

- $g \circ f \circ g = g$
- $f \circ g \circ f = f$
- $f \circ g = g \circ f$

L'application g est alors appelée pseudo-inverse de f.

On considère l'application $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y, 2x + 3y + z, 3x + 5y + 2z)$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f, et donner une base de chaque.
3. On note $\mathscr{B}$ la famille constituée des trois vecteurs $e_1 = (0, 1, 2)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ et $e_3 = (1, -1, 1)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$, et calculer son inverse P^{-1}.
5. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}$.
7. Vous avez dû trouver à la question précédente un résultat sous la forme $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note pour cette question $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Vérifier que M est inversible et donner son inverse $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{pmatrix}$.
8. Vérifier que la matrice $\mathrm{B}' = \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta & 0 \\ \eta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est le pseudo-inverse de la matrice A'.
9. En déduire le pseudo-inverse B de la matrice A en fonction de B' et de P, puis explicitement.

Exercice 2 : un problème de tirages

Dans tout cet exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

— Si k est égal à 1, on arrête les tirages.

— Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

— On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n.

Cas particuliers

1. Que sont les ensembles des valeurs prises par X_1 et X_2 respectivement notés $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$? Justifier.
2. Quelle est la loi de X_1 ?
3. (a) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Déterminer $P(X_2 = 1)$.
   (b) Déterminer la loi de X_2.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_2.

Cas général

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**. On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par I_n, noté $I_n(\Omega)$, et donner la loi de I_n.
2. Justifier que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
3. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
4. Justifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a

$$P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$$

5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $j \geq 2$, on a

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$$

6. Démontrer que, pour tout $j \geq 2$, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \frac{n-1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1)$$

On pourra exprimer $n\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) - (n-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j)$ *en utilisant le résultat de la question précédente.*

7. (a) Démontrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Problème

Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leq \mathrm{H}_n \leq 1 + \ln(n)$$

3. À l'aide de la relation précédente :

   (a) Démontrer que la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

   (b) Démontrer que $\mathrm{H}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n), \qquad v_n = \mathrm{H}_n - \ln(n+1)$$

   (a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
   Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 1.

   (b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

5. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

   (b) Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ϵ strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ϵ près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

Partie B : Le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$ par

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier la convergence de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$.
7. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
8. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.
9. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0, \pi]$, on pose
$$\mathrm{D}_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0, \pi]$,
$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \mathrm{D}_n(t)$$
   (b) En déduire que, si $t \in]0, \pi]$, $\mathrm{D}_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
   (c) Calculer la valeur de $\mathrm{D}_n(0)$.
10. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par
$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin t} \text{ si } t > 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$
   (a) Démontrer que f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Donner le développement limité de $(t - \sin t)$ en 0 à l'ordre 3.
   (c) Démontrer que f est dérivable en 0.
   (d) Donner le développement limité de $(\sin t - t\cos t)$ en 0 à l'ordre 3.

(e) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

11. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathrm{B}_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\mathrm{D}_n(t) - 1}{2} \mathrm{d}t$$

(c) Déterminer la valeur de

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t$$

(d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{D}_n(t) \mathrm{d}t$$

(e) En déduire à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{2} t$ que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin\big((2n+1)t\big) \mathrm{d}t$$

12. Déterminer une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin\big((2n+1)t\big) \mathrm{d}t$$

13. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin\big((2n+1)t\big) \mathrm{d}t = 0$$

14. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n \geq 1}$.