Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

Devoir surveillé de Mathématiques n° 1 - 2 heures
Le samedi 26 Septembre 2020

Ce devoir est constitué de 6 exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque. Soignez la rédaction et la présentation : vos raisonnements doivent être explicités - tout résultat proprement encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les 3 équations qui suivent:

(a) $\cos(3x) = \cos(x)$ **(b)** $\sin(2x) + \sin(4x) = \cos(x)$ **(c)** $1 - \cos(2x) = \sqrt{2}\sin(x)$

(d) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x - \sin x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ (on pensera à réduire le membre de gauche)

Exercice 2 :

1. Justifier, sans calculatrice bien entendu, que $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ est compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

2. On note α le réel vérifiant : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

a) Représentez sur le cercle trigonométrique un (petit) arc de cercle contenant forcément le point d'affixe $e^{i\alpha}$.

b) Pour tout réel *x*, construire une formule donnant $\cos(4x)$ en fonction de $\sin(x)$.

c) Montrer qu'alors α vérifie l'égalité $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$

d) En déduire précisément α .

Exercice 3 : Soient *a* et *b* deux complexes distincts de module 1.

Pour tout complexe *z*, posons $X = \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a - b}$.

Montrer que *X* est imaginaire pur.

Exercice 4 : Trouver une solution imaginaire pure de l'équation : $z^3 - 2iz^2 + (2+i)z + 3 + 3i = 0$ puis la résoudre dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 : Soit n un entier naturel non nul.

a) Comment appelle-t-on les solutions complexes de l'équation $X^n = 1$? Quel est leur nombre ? Listez-les pour n=3 puis n quelconque.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^3 = (z-i)^3$ en explicitant ses solutions sous forme algébrique.

c) Plus généralement résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ pour tout entier n non nul.
Quelle est la particularité des solutions obtenues ? Combien obtient-on de solutions distinctes ?

Exercice 6 :

a) Notons $f(x) = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$. Pour quelles valeurs réelles $f(x)$ est bien défini ? Appelons D_f cet ensemble.

b) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout x dans D_f, on ait : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

c) En déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)(k+1)}$ pour tout n supérieur ou égal à 2.