Durée totale : 4 heures

PARTIE ALGÈBRE

Exercice 1 (4 points)

Soit $\mathrm{P} = 8\mathrm{X}^4 + 8\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1$ et $\mathrm{A} = 8\sin^3(\theta) - 2\sin(\theta)\sin(3\theta) - \sin(\theta) - 3\cos(2\theta) + 2$.

1. (a) Trouver une racine évidente du polynôme P.
   $\mathrm{P}(-1) = 0$ donc -1 est une racine évidente du polynôme P.

   (b) En déduire toutes les racines réelles de P.
   $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)(8\mathrm{X}^3-1) = (\mathrm{X}+1)\left(\mathrm{X}-\dfrac{1}{2}\right)(8\mathrm{X}^2+4\mathrm{X}+2)$ et le polynôme $8\mathrm{X}^2+4\mathrm{X}+2$ ne possède aucune racine réelle car son discriminant est strictement négatif.
   Donc les racines réelles de P sont -1 et $\dfrac{1}{2}$.

2. Exprimer $\cos(2\theta)$, $\sin(3\theta)$, et enfin A uniquement à l'aide de $\sin(\theta)$.
   $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$.
   $\sin(3\theta) = \sin\theta\cos(2\theta) + \cos\theta\sin(2\theta) = \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + 2\cos^2\theta\sin\theta$
   $= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.
   Donc $\mathrm{A} = 8\sin^3\theta - 2\sin\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - \sin\theta - 3(1-2\sin^2\theta) + 2$
   Donc $\mathrm{A} = 8\sin^4\theta + 8\sin^3\theta - \sin\theta - 1$.

3. Résoudre finalement l'équation $\mathrm{A} = 0$.
   En posant $\mathrm{X} = \sin\theta$, $\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow 8\mathrm{X}^4 + 8\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} = -1$ ou $\mathrm{X} = \dfrac{1}{2}$
   $\Leftrightarrow \sin\theta = -1$ ou $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$.
   $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 2 (5 points)

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Calculer A^2.
   $$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   (b) Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{A}^2 = a\mathrm{A} + b\mathrm{I}_3$.
   $\mathrm{A}^2 = 5\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3$.

(c) En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.
Donc $A\left(-\frac{1}{4}(A-5I_3)\right)=I$ donc A est inversible et son inverse est $A^{-1}=\left(-\frac{1}{4}(A-5I_3)\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

2. Rappeler l'énoncé précis de la formule du binôme de Newton pour les matrices.
Étant données deux matrices carrées B et D de même dimension qui commutent (c'est-à-dire que BD = DB), alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(B+D)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^kD^{n-k}$.

3. (a) Trouver une matrice J telle que $A=I_3+J$.
$J=A-I_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(b) Calculer J^2.
$J^2=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}=3J$

(c) Montrons par récurrence que $\mathscr{P}_k$: « $J^k=3^{k-1}J$ » est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $k=1$, $J^1=J=3^0J$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie c'est-à-dire que $J^k=3^{k-1}J$.
Alors $J^{k+1}=J\times J^k=J\times 3^{k-1}J=3^{k-1}J^2=3^{k-1}\times 3J=3^kJ$, donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $J^k=3^{k-1}J$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

(d) Donner une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}$, où $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k1^{n-k}=\frac{1}{3}\left((3+1)^n-1\right)=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right).$$

4. En déduire que $A^n=\frac{1}{3}(4^n-1)J+I_3$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
$A^n=(I_3+J)^n$, or les matrices I_3 et J commutent, donc :
$$A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k=I_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k=I_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J=I_3+\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)J.$$

5. Cette formule est-elle également valable pour $n=-1$?
Pour $n=-1$, on obtient $I_3+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right)J=I_3-\frac{1}{4}J=I_3-\frac{1}{4}(A-I)=\frac{5}{4}I_3-\frac{1}{4}A$ qui est bien égal à A^{-1}, la formule reste donc vraie.

Exercice 3 (3 points)

Considérons le système $\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 \\ x & & & + & z & - & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & - & 3t & = & m \end{array}\right.$ d'inconnues réelles x, y, z, t et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre ce système lorsque $m = 9$.
$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 \\ x & & & + & z & - & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & - & 3t & = & 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & + & z & - & 3t & = & 3 & \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ 2x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 & \\ 2x & + & 3y & - & 4z & - & 3t & = & 9 & \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & + & z & - & 3t & = & -3 & \\ & - & 3y & + & 6z & - & 3t & = & -3 & \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & + & 3y & - & 6z & + & 3t & = & 3 & \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & = & - & z & + & 3t & - & 3 & \\ y & = & + & 2z & - & t & + & 1 & -\frac{1}{3}\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$
$\mathscr{S} = \left\{(-z+3t-3, 2z-t+1, z, t), z, t \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Résoudre ce système lorsque $m \neq 9$.
$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 \\ x & & & + & z & - & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & - & 3t & = & m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & + & z & - & 3t & = & 3 & \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ 2x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 & \\ 2x & + & 3y & - & 4z & - & 3t & = & m & \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & + & z & - & 3t & = & -3 & \\ & - & 3y & + & 6z & - & 3t & = & -3 & \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & + & 3y & - & 6z & + & 3t & = & m-6 & \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$
Or $m - 6 \neq -(-3)$ puisque $m \neq 9$, donc le système n'a pas de solution.

Exercice 4 (4 points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}(a + kb)$ et $\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sh}(a + kb)$.

1. Donner une expression simplifiée de S_n et de T_n lorsque $b = 0$.
Lorsque $b = 0$, $\mathrm{S}_n = n \,\mathrm{ch}\, a$ et $\mathrm{T}_n = n \,\mathrm{sh}\, a$.

On considère dans toute la suite que $b \neq 0$.

2. Donner une forme simplifiée des expressions $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)$ pour tout x réel.
$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$.

3. Donner, en fonction de $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, une forme compacte de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$.
$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$.

4. Utiliser les questions précédentes pour déterminer une expression simplifiée de $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n$ ainsi que de $\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n$.

$$\mathrm{S}_n+\mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{ch}(a+kb)+\mathrm{sh}(a+kb)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{a+kb}=e^a\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^b\right)^k=e^a\frac{1-e^{nb}}{1-e^b}.$$
$$\mathrm{S}_n-\mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{ch}(a+kb)-\mathrm{sh}(a+kb)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-(a+kb)}=e^{-a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-b}\right)^k=e^{-a}\frac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}}.$$

5. En déduire les valeurs de S_n et de T_n.
$\mathrm{S}_n=\dfrac{1}{2}\left(e^a\dfrac{1-e^{nb}}{1-e^b}+e^{-a}\dfrac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}}\right)$, et $\mathrm{T}_n=\dfrac{1}{2}\left(e^a\dfrac{1-e^{nb}}{1-e^b}-e^{-a}\dfrac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}}\right)$.

PARTIE ANALYSE

Exercice 5 (8 points)

On considère la fonction f définie par :

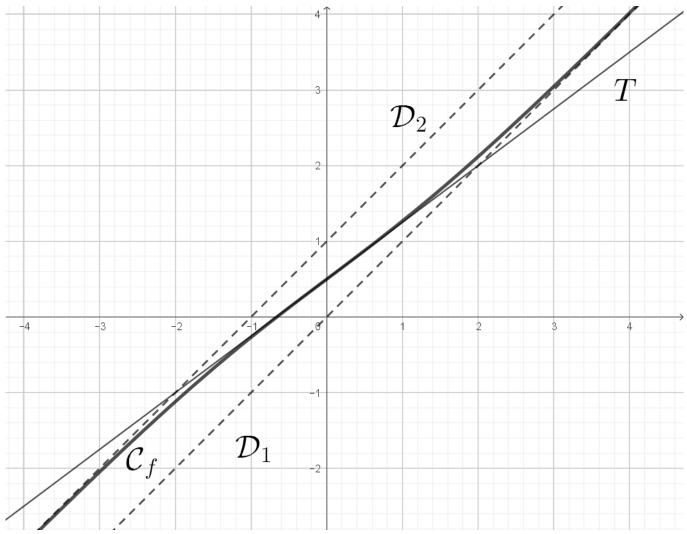
$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$$

Et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Donner le domaine de définition I de la fonction f.
   On a $1+e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
2. Établir les variations de la fonction f sur I.
   $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + 1 = \dfrac{-e^x + 1 + 2e^x + (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^{2x} + e^x + 1}{(1+e^x)^2} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{3}{4}$ donc T a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.
4. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - x\big)$, et en déduire une équation d'une asymptote $\mathscr{D}_1$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   $f(x) - x = \dfrac{1}{1+e^x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big) = 0$ donc la courbe de f admet comme asymptote oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = x$.

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - x - 1\big)$, et en déduire une équation d'une asymptote $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   $f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{1+e^x} - 1 = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-x-1\big) = 0$ donc la courbe de f admet comme asymptote oblique en $-\infty$ la droite d'équation $y = x+1$.

   (c) Tracer T, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et enfin $\mathscr{C}_f$.
5. (a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ en effectuant le changement de variable $u = e^x$.
   On a $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x$, donc :
   $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u(1+u)}\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = \ln u - \ln(1+u)$
   car $u = e^x > 0$.
   Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est $x \mapsto \ln(e^x) - \ln(1+e^x) = x - \ln(1+e^x)$.



(b) En déduire l'expression de la primitive F de f sur I qui s'annule en 0.
$\mathrm{F}(x) = x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
Donc $\mathrm{F}(0) = -\ln 2 + \mathrm{C}$ donc $\mathrm{C} = \ln 2$ et $\mathrm{F}(x) = x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{2}x^2 + \ln 2$.

Exercice 6 (4 points)

1. Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x+1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$ pour tout $x \in]0,1[$.
   On a $\frac{x+1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$.
2. Résoudre sur l'intervalle $]0,1[$ l'équation différentielle homogène :

$$\left(x-x^2\right) y'(x) + (x+1)\, y(x) = 0$$

   Cette équation équivaut à : $y' + \frac{x+1}{x(1-x)} y = 0$.
   $a(x) = \frac{x+1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - 2\frac{-1}{1-x}$, donc $\mathrm{A}(x) = \ln x - 2\ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$,
   donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :
   $x \longmapsto \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)} = \mathrm{C}\frac{(1-x)^2}{x}$, où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
3. Trouver toutes les solutions sur l'intervalle $]0,1[$ de l'équation différentielle :

$$\left(x-x^2\right) y'(x) + (x+1)\, y(x) = x-1$$

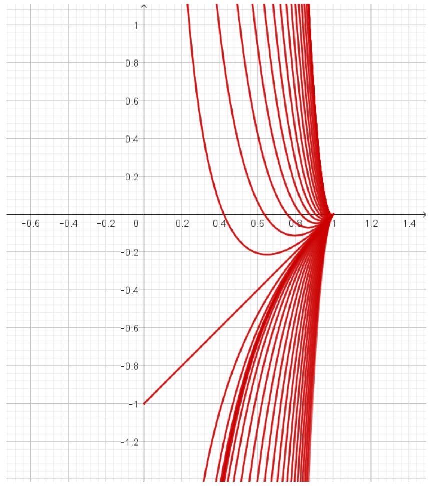


FIGURE 1 – Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \mathrm{C}(x) \times \dfrac{(1-x)^2}{x}$.

$y_0'(x) = \mathrm{C}'(x) \times \dfrac{(1-x)^2}{x} + \mathrm{C}(x) \times \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Donc $\left(x-x^2\right) y_0'(x) + (x+1)\, y_0(x) = x-1$

$\Leftrightarrow x(1-x)\mathrm{C}'(x) \times \dfrac{(1-x)^2}{x} + x(1-x)\mathrm{C}(x) \times \dfrac{x^2-1}{x^2} + (x+1)\mathrm{C}(x) \times \dfrac{(1-x)^2}{x} = x-1$

$\Leftrightarrow (1-x)^3\mathrm{C}'(x) - (1-x)\mathrm{C}(x)\dfrac{(1+x)(1-x)}{x} + (1+x)\mathrm{C}(x)\dfrac{(1-x)^2}{x} = x-1$

$\Leftrightarrow \mathrm{C}'(x) = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

On prend $\mathrm{C}(x) = -\dfrac{1}{1-x}$ et par conséquent $y_0(x) = -\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{(1-x)^2}{x} = -\dfrac{1-x}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Finalement les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$x \longmapsto \mathrm{C}\dfrac{(1-x)^2}{x} + 1 - \dfrac{1}{x}$.

4. Parmi ces solutions, y en a-t-il qui admettent une limite en 0 ? en 1 ?

   Toutes ces fonctions admettent pour limite 0 lorsque x tend vers 1.

   Prenons une solution $f(x) = \mathrm{C}\dfrac{(1-x)^2}{x} + 1 - \dfrac{1}{x} = \mathrm{C}\dfrac{1-2x+x^2}{x} + 1 - \dfrac{1}{x} = (\mathrm{C}-1)\dfrac{1}{x} - 2\mathrm{C} + \mathrm{C}x + 1$.

   Cette fonction admet une limite en 0 si et seulement si $\mathrm{C} = 1$.

Exercice 7 (9 points)

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

1. Montrer que l'on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, les réels a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.
   Montrons par récurrence que $\mathscr{P}_n$: « $a_n > 0$ et $b_n > 0$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $a_n > 0$ et $b_n > 0$.
   Alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} > 0$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout entier naturel n.
2. Calculer a_1 et vérifier que $b_1 = \sqrt{3}$.
   $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\dfrac{3}{2} \times 2} = \sqrt{3}$.
3. (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

   $$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n)$$

   On a $b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right)$ car $a_{n+1} > 0$
   $= \sqrt{a_{n+1}} \times \dfrac{b_n - a_{n+1}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$ en multipliant par la quantité conjuguée
   $= \sqrt{a_{n+1}} \times \dfrac{b_n - \frac{a_n + b_n}{2}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n)$

   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n < b_n$.
   Montrons par récurrence que $\mathscr{P}_n$: « $a_n < b_n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $a_0 < b_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $a_n < b_n$.
   Alors $b_n - a_n > 0$ et d'après la question précédente,
   $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n) > 0$
   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a $a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
On a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(d) Montrer que $b_n = \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir la stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} b_n}{a_{n+1}} = b_n$.
Donc $b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \dfrac{b_{n+1}(a_{n+1} - b_{n+1})}{a_{n+1}} < 0$,
donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4. (a) Justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

On a $\sqrt{b_n} > 0$, donc $2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right) > 2\sqrt{a_{n+1}}$, donc $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} < \dfrac{1}{2}$,

donc $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.

(b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}_n$: « $0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a $b_0 - a_0 = 1$ donc $0 < b_0 - a_0 \leqslant \dfrac{1}{2^0}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Alors $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) < \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$, or $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$
donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence, on a $0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

(c) Déduire de tout ce qui précède que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite. On note ℓ cette limite commune.
$\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$ car il s'agit d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$,
donc, d'après le théorème des gendarmes, $(b_n - a_n)$ tend vers 0.
(a_n) et (b_n) sont des suites respectivement croissante et décroissante,
donc les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes, donc elles convergent toutes les deux et possèdent la même limite, notée ℓ.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

Pour tout entier naturel n, et pour tout entier naturel $p \geqslant n$, on a $a_n \leqslant a_p$, donc en faisant tendre p vers $+\infty$, on a $a_n \leqslant \ell$.
De même pour tout entier naturel n, et pour tout entier naturel $p \geqslant n$, on a $b_p \leqslant b_n$, donc en faisant tendre p vers $+\infty$, on a $\ell \leqslant b_n$.

5. La limite commune ℓ aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'un des quatre réels suivants :

$$(1)\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \qquad (2)\ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \qquad (3)\ \frac{3}{\pi} \qquad (4)\ 3$$

Compte tenu de certains des résultats obtenus dans cet exercice, déterminer ℓ en justifiant votre réponse.
On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ donc nécessairement $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.
Or $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} < 1$ car $\sqrt{3} < 2 < \pi$. Par ailleurs $\dfrac{3}{\pi} < 1$ et $3 > 2$
Donc finalement $\ell = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$.