Durée totale : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
Rendre une copie différente pour chacune des deux parties.

PARTIE ALGÈBRE

Exercice 1 (5 points)

Soit $P = 8X^4 + 8X^3 - X - 1$ et $A = 8\sin^3(\theta) - 2\sin(\theta)\sin(3\theta) - \sin(\theta) - 3\cos(2\theta) + 2$.

1. (a) Trouver une racine évidente du polynôme P.
   (b) En déduire toutes les racines réelles de P.
2. Exprimer $\cos(2\theta)$, $\sin(3\theta)$, et enfin A uniquement à l'aide de $\sin(\theta)$.
3. Résoudre finalement l'équation $A = 0$.

Exercice 2 (8 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
   (c) En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.
2. Rappeler l'énoncé précis de la formule du binôme de Newton pour les matrices.
3. (a) Trouver une matrice J telle que $A = I_3 + J$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) Montrer par récurrence que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Donner une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que $A^n = \dfrac{1}{3}(4^n - 1)J + I_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Cette formule est-elle également valable pour $n = -1$?

Exercice 3 (3 points)

Considérons le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 \\ x & & & + & z & - & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & - & 3t & = & m \end{array}\right.$ d'inconnues réelles x, y, z, t et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre ce système lorsque $m = 9$.
2. Résoudre ce système lorsque $m \neq 9$.

Exercice 4 (4 points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}(a + kb)$ et $\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sh}(a + kb)$.

1. Donner une expression simplifiée de S_n et de T_n lorsque $b = 0$.

On considère dans toute la suite que $b \neq 0$.

2. Donner une forme simplifiée des expressions $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)$ pour tout x réel.
3. Donner, en fonction de $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, une forme compacte de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$.
4. Utiliser les questions précédentes pour déterminer une expression simplifiée de $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n$ ainsi que de $\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n$.
5. En déduire les valeurs de S_n et de T_n.

PARTIE ANALYSE

Exercice 5 (7 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$$

Et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Donner le domaine de définition I de la fonction f.
2. Établir les variations de la fonction f sur I.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$, et en déduire une équation d'une asymptote $\mathscr{D}_1$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x-1\right)$, et en déduire une équation d'une asymptote $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Tracer T, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et enfin $\mathscr{C}_f$.
5. (a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ en effectuant le changement de variable $u = e^x$.
   (b) En déduire l'expression de la primitive F de f sur I qui s'annule en 0.

Exercice 6 (4 points)

1. Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{x+1}{x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}$ pour tout $x \in]0,1[$.
2. Résoudre sur l'intervalle $]0,1[$ l'équation différentielle homogène :
$$\left(x-x^2\right)y' + (x+1)\,y = 0$$
3. Trouver toutes les solutions sur l'intervalle $]0,1[$ de l'équation différentielle :
$$\left(x-x^2\right)y' + (x+1)\,y = x-1$$
4. Parmi ces solutions, y en a-t-il qui admettent une limite finie en 0 ? en 1 ? Le cas échéant préciser les valeurs de ces limites.

Exercice 7 (9 points)

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

1. Montrer que l'on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, les réels a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.
2. Calculer a_1 et vérifier que $b_1 = \sqrt{3}$.
3. (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n)$$

   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n < b_n$.

   (c) Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   (d) Montrer que $b_n = \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir la stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

   (b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}$$

   (c) Déduire de tout ce qui précède que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite. On note ℓ cette limite commune.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

5. La limite commune ℓ aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'un des quatre réels suivants :

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3}}{\pi} \qquad \text{b) } \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \qquad \text{c) } \frac{3}{\pi} \qquad \text{d) } 3$$

   Compte tenu de certains des résultats obtenus dans cet exercice, déterminer ℓ en justifiant votre réponse.