DS n° 2 : Corrigé

Samedi 15 Octobre 2022

Durée : 2 heures

Exercice 1 8 pts : 1) 0.5+0.5+1 2) 0.5+0.5 3) 1+0.5+0.5 4) 1+0.5+0.5 5) 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
   $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$, or $\sqrt{x^2} = |x|$ et $|x| \geq -x$ donc $\sqrt{1+x^2} > -x$ donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
   Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = e^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \left(e^2 - x\right)^2$ car $1 + x^2 \geq 0$
   donc $f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^4 - 2e^2 x + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^4-1}{2e^2}$. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{e^4-1}{2e^2}\right\}$.
   Or $e \approx 2,7$, donc $\dfrac{e^2}{2} \approx \dfrac{7,29}{2}$, et $\dfrac{1}{2e^2} < 0,1$, donc $\dfrac{e^4-1}{2e^2} \approx 3,6$ au dixième près.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.
   $f(x) + f(-x) = \ln\left[\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] = \ln\left(1 + x^2 - x^2\right) = \ln 1 = 0$.

   (b) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

3. (a) Calculer la dérivée de f, et en donner une expression simple.
   $$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

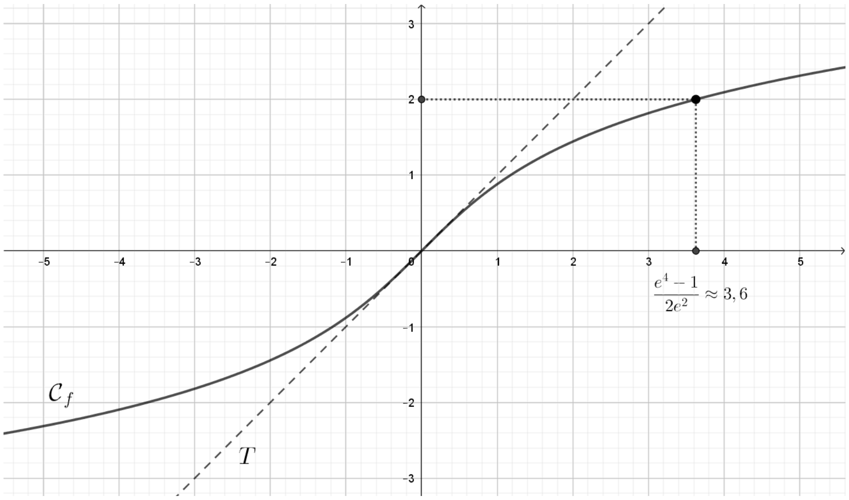
   (b) Étudier les variations de f.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ donc f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc l'équation de T est : $y = x$.

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\left[f(x)\right] = x$.
   $$\mathrm{sh}\left[f(x)\right] = \frac{e^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$
   $$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - 1}{2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{2x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = x$$

   (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et comme f est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\left[f(x)\right] = x$, donc f et sinus hyperbolique sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

(c) En déduire très facilement la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.
$\operatorname{sh} x = 2 \Leftrightarrow x = f(2)$ donc $\mathscr{S} = \left\{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$.

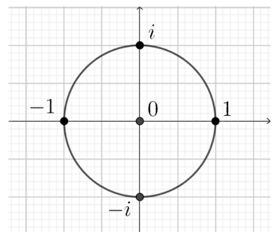
5. 

Exercice 2 3 pts : 1) 1 2) 0.5 3) 0.5 4) 1

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = \overline{z} \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(4\theta) = 1$.
   $\cos(4\theta) = 1 \Leftrightarrow 4\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = k \times \dfrac{\pi}{2}$. $\mathscr{S} = \left\{k \times \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = x$.
   $x^3 = x \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$. $\mathscr{S} = \{-1, 0, 1\}$.
3. On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).
   Montrer que le module de α est nécessairement égal à 0 ou à 1.
   On a $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ donc $\left|\alpha^3\right| = \left|\overline{\alpha}\right|$ donc $|\alpha|^3 = |\alpha|$, donc, d'après la question précédente, $|\alpha|$ est égal à -1 (exclu), ou 0 ou 1.
4. En déduire toutes les solutions de (E) et représenter leurs images dans le plan complexe, en prenant comme unité 2 cm.
   $z = 0$ est clairement une solution de (E). Toute autre solution serait nécessairement de module 1 et pourrait donc s'écrire $z = e^{i\theta}$.
   Alors $z^3 = \overline{z} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{4i\theta} = 1 \Leftrightarrow \cos(4\theta) = 1$.
   D'après 1., les solutions de (E) sont finalement 0, $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{2i\frac{\pi}{2}} = -1$, et $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.



Exercice 3 2 pts : 1) 1 2) 1

Justifier avec rigueur les identités suivantes :

1. $2\,\text{Arccos}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{8}\right)$.
   Notons $\alpha = \text{Arccos}\left(\dfrac{3}{4}\right)$. On a $\cos\alpha = \dfrac{3}{4} \geq 0$, donc $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et par conséquent $2\alpha \in [0, \pi]$.
   Par ailleurs, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{8}$, donc $2\alpha = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{8}\right)$.
2. $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
   Notons $\alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $\beta = \text{Arctan}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On a $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\alpha + \beta \in [0, \pi]$.
   Par ailleurs, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}} = 1$, donc $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4 4 pts : 1) 1 2) 1.5 3) 1.5

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation de l'inconnue réelle x suivantes :

1. $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.
   $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right)$
   $\Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} + 2k\pi$ ou $2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{10} + 4\dfrac{k\pi}{5}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + 4k\dfrac{\pi}{3}$.
   $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{3\pi}{10} + 4\dfrac{k\pi}{5}, \dfrac{\pi}{2} + 4k\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \cos(\pi - 2x)\right] > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) > \dfrac{1}{2}$
   $\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.
   $\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right[$.

Exercice 5 3 pts : 1) 0.5 2) 0.5+1 3) 1

Posons $A = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $B = \sum_{k=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. Calculer $A+B$.
   $A+B = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 4$
2. Linéariser $A-B$ puis calculer sa valeur numérique.
   $A-B = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$
   $= 2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} + \cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{2}$, car $\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.
   $\begin{cases} A+B=4 \\ A-B=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{7}{4} \\ B=\frac{9}{4} \end{cases}$