Devoir Surveillé n° 2

Samedi 15 Octobre 2022

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

Exercice 1 8 pts : 1) 0.5+0.5+1 2) 0.5+0.5 3) 1+0.5+0.5 4) 1+0.5+0.5 5) 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
   (c) Résoudre l'équation :
   $$f(x) = 2$$
   On donnera, sans justifier, une valeur approchée de la solution au dixième près.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.
   (b) En déduire quelle est la parité de f.
3. (a) Calculer la dérivée de f, et en donner une expression simple.
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$.
   (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?
   (c) En déduire très facilement la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.
5. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ en prenant comme unité 2 cm, et en faisant apparaître la solution de la question 1c.

Exercice 2 3 pts : 1) 1 2) 0.5 3) 0.5 4) 1

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = \overline{z} \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(4\theta) = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = x$.
3. On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).
   Montrer que le module de α est nécessairement égal à 0 ou à 1.
4. En déduire toutes les solutions de (E) et représenter leurs images dans le plan complexe, en prenant comme unité 2 cm.

Exercice 3 2 pts : 1) 1 2) 1

Justifier avec rigueur les identités suivantes :

1. $2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)$,
2. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 4 pts : 1) 1 2) 1.5 3) 1.5

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation de l'inconnue réelle x suivantes :

1. $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$,
3. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) > \frac{1}{2}$.

Exercice 5 3 pts : 1) 0.5 2) 0.5+1 3) 1

Posons $\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $\mathrm{B} = \sum_{k=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. Calculer $\mathrm{A} + \mathrm{B}$.
2. Linéariser $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ puis calculer sa valeur numérique.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.