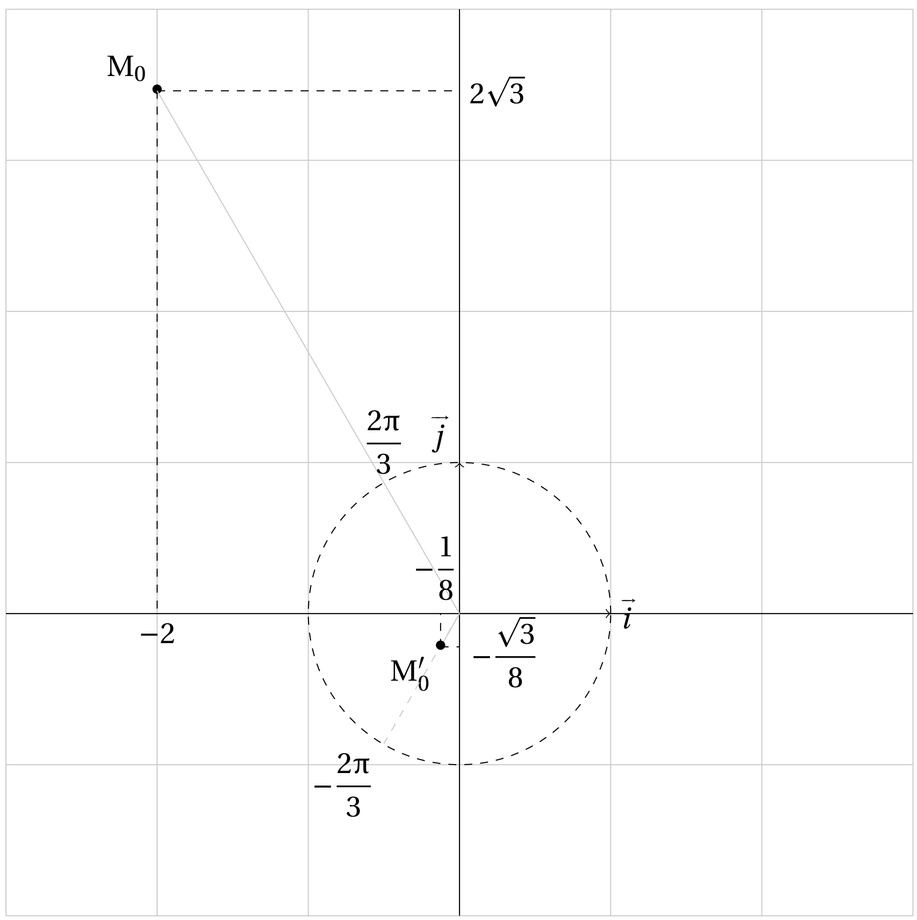
Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

Exercice 1 6 pts : 1) 0,5+0,5+1+0,5 2) 0,5+1 3)0,5+0,5+1

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

   (a) Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).



   (b) Donner la forme trigonométrique de z_0.
   $z_0 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

(c) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{1}{z_0}$.

$\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(d) Placer sur la figure l'image M_0' de $\dfrac{1}{z_0}$.

2. On considère maintenant un nombre complexe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, dont la partie réelle x est non nulle.

   (a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{1}{z}$ en fonction de x et de y.

   $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

   (b) Démontrer que z et $\dfrac{1}{z}$ ont des parties réelles égales si et seulement si $|z| = 1$.

   $\mathrm{R}e(z) = \mathrm{R}e\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ car $x \neq 0$.

   donc $\mathrm{R}e(z) = \mathrm{R}e\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ car $|z|$ est un nombre positif.

3. On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.

   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

   $a\overline{a} = |a|^2 = 1$ donc $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$.

   (b) Démontrer que $ab + ac + bc = abc\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right)$.

   $abc\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right) = a\overline{a}bc + ab\overline{b}c + abc\overline{c} = bc + ac + ab$ car $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$.

   (c) En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

   Donc $|ab + ac + bc| = \left|abc\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right)\right| = |a|.|b|.|c|.\left|\overline{a+b+c}\right| = |a+b+c|$.

Exercice 2 4 pts : 1) 1 2) 1.5 3) 1.5

On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

1. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \dfrac{\pi}{4}$.

   Pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, l'équation s'écrit $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

   $\Delta = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$ donc les solutions de l'équation sont :

   $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t.

   $\Delta = (2\sin t)^2 - 4 = 4\left(\sin^2 t - 1\right) = -4\cos^2 t = (2i\cos t)^2$,

donc $z_1 = \dfrac{2\sin t - 2i\cos t}{2} = \sin t - i\cos t = e^{i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$,
et $z_2 = \dfrac{2\sin t + 2i\cos t}{2} = \sin t + i\cos t = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$.

3. Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$.
D'après ce qui précède, on a $z^2 = e^{i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $z^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$.
Donc $\mathscr{S} = \left\{e^{i\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, -e^{i\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}, -e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}\right\}$

Exercice 3 2 pts : 1) 0.5 2) 1.5

À l'aide de formules appropriées et de la connaissance des angles standards, déterminer les cosinus, sinus et tangente des angles suivants :

1. $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$.
$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
2. $\beta = \dfrac{\pi}{8}$.
On a $\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et de même $\cos\dfrac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\dfrac{\pi}{8}$ donc $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Enfin, $\tan\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Exercice 4 4 pts : 1) 1 2) 1.5 3) 1.5

Résoudre sur l'intervalle donné I les équations et l'inéquation de l'inconnue réelle x suivantes :

1. $\tan(3x) = 1$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
$\tan(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
$\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x}{4} + 2k\pi$ ou $x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{x}{4} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\dfrac{5}{4}x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{8\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{8\pi}{5}$
$\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{8\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{1}{2}$ sur $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$.
$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \dfrac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \cos 2x > \dfrac{1}{2}$.
$\mathscr{S} = \left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$

Exercice 5 4 pts : 1) 0.5 2) 1 3) 2 4) 0.5

On cherche à déterminer la valeur numérique de $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. Linéariser l'expression $\cos^2 x$.
   $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)$.
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2k\pi}{9}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)$
3. Montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = 0$.
   $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = 2\cos\dfrac{3\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = \cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = 0$ car $\dfrac{8\pi}{9} = \pi - \dfrac{\pi}{9}$.
4. Conclure.
   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = 2 + \frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{9} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.