Devoir Surveillé n° 1

Samedi 24 Septembre 2022

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

Exercice 1 6 pts : 1) 0,5+0,5+1+0,5 2) 0,5+1 3)0,5+0,5+1

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.
   (a) Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).
   (b) Donner la forme trigonométrique de z_0.
   (c) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{1}{z_0}$.
   (d) Placer sur la figure l'image M'_0 de $\dfrac{1}{z_0}$.
2. On considère maintenant un nombre complexe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, dont la partie réelle x est non nulle.
   (a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{1}{z}$ en fonction de x et de y.
   (b) Démontrer que z et $\dfrac{1}{z}$ ont des parties réelles égales si et seulement si $|z| = 1$.
3. On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.
   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.
   (b) Démontrer que $ab + ac + bc = abc\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right)$.
   (c) En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

Exercice 2 4 pts : 1) 1 2) 1.5 3) 1.5

On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

1. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \dfrac{\pi}{4}$.
   On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t.
   On donnera là aussi les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
3. Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$

Exercice 3 2 pts : 1) 0.5 2) 1.5

À l'aide de formules appropriées et de la connaissance des angles standards, déterminer les cosinus, sinus et tangente des angles suivants :

1. $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$.
2. $\beta = \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 4 4 pts : 1) 1 2) 1.5 3) 1.5

Résoudre sur l'intervalle donné I les équations et l'inéquation de l'inconnue réelle x suivantes :

1. $\tan(3x) = 1$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
2. $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
3. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{1}{2}$ sur $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$.

Exercice 5 4 pts : 1) 0.5 2) 1 3) 2 4) 0.5

On cherche à déterminer la valeur numérique de $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. Linéariser l'expression $\cos^2 x$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)$
3. Montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = 0$.
4. Conclure.