Devoir Surveillé n° 1 - Corrigé

Samedi 25 Septembre 2021

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$2\sin^2 x + 5\cos x = 4$$
$2(1-\cos^2 x)+5\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$. On pose $X = \cos x$: $-2X^2+5X-2=0$
$\Delta = 9$, donc l'équation a deux solutions $X_1 = \dfrac{-5-3}{-4} = 2$ et $X_2 = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2}$.
Seule la deuxième valeur donne des solutions à l'équation initiale.
$\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Finalement $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$1 + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$
Les nombres de la forme $x = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont pas solution de l'équation et les nombres de la forme $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de l'équation.
On considère dans la suite que $x \neq 0\,[\pi]$.
$\dfrac{\sin(2x)\cos\frac{3}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$ ou $\cos\frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 + k\pi$ ou $\dfrac{3}{2}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = 0 + k \times \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Finalement, en excluant des valeurs trouvées ci-dessus celles égales à $0\,[2\pi]$, et comme celles égales à $\pi\,[2\pi]$ sont contenues dans les deux expressions, on a $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. (a) Écrire sous forme d'un produit l'expression $\cos x + \cos(3x)$.
$\cos x + \cos(3x) = 2\cos 2x \cos x$

   (b) Donner dans un tableau le signe de $\cos 2x$ en fonction des valeurs de x sur l'intervalle $[0, \pi]$.

x	0		$+\frac{\pi}{4}$		$+\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (c) En déduire les solutions dans l'intervalle $[0, \pi]$ de l'inéquation :
$$\cos x + \cos(3x) \geq 0$$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x \cos x \geq 0$

x	0		$+\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$+\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos 2x \times \cos x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $\mathscr{S} = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Exercice 2

On cherche à résoudre l'équation :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (1+i)z + i = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Rechercher une solution de l'équation qui soit un nombre imaginaire pur de la forme ai avec $a \in \mathbb{R}$.
   On remplace z par ai :
   $-a^3 i - a^2(1+i) + i(1+i)a + i = 0 \Leftrightarrow -a^2 - a + i(-a^3 - a^2 - a - 1) = 0$
   $a = -1$ convient, donc $-i$ est une solution de l'équation.
2. Déterminer deux nombres réels b et c tels que :
   $$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)\left(z^2 + bz + c\right)$$
   $z^3 + (1+i)z^2 + (1+i)z + i = (z+i)(z^2 + z + 1)$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E), qui seront données sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
   Le trinôme $z^2 + z + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$,
   donc les solutions de (E) sont $\mathscr{S} = \left\{-i, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$

Exercice 3

Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,
   $$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$
   $$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1 - \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) - (z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}$$

$$= \frac{1+\bar{a}za\bar{z}-z\bar{z}-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-a\bar{a})(1-z\bar{z})}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

   On a $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1$

   D'après la question précédente, c'est équivalent à $\dfrac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0$

   or par hypothèse, $1-|a|^2 \geq 0$, et bien sûr $|1-\bar{a}z|^2 \geq 0$

   donc c'est encore équivalent à : $1-|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$.

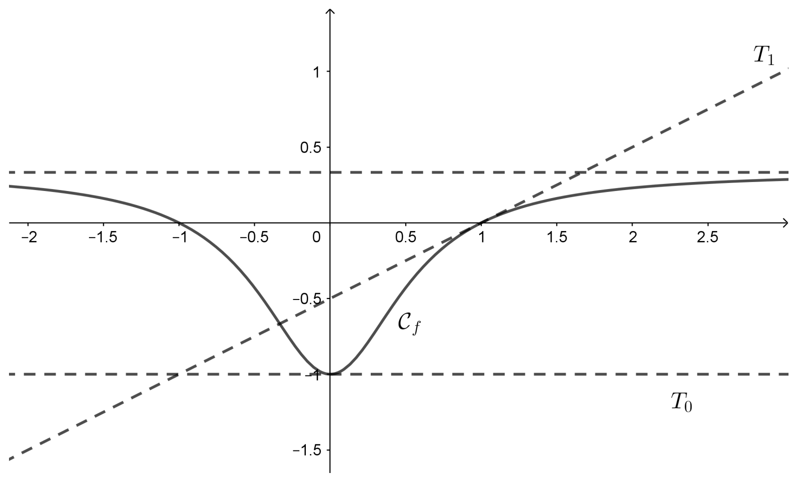
   L'ensemble des nombres complexes vérifiant la relation $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$ est l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Étudier la parité de la fonction f.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$, donc f est une fonction paire.
2. Étudier les variations de f.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{8x}{(3x^2+1)^2}$ est du signe de x, donc f est croissante sur $[0,+\infty[$, et décroissante sur $]-\infty,0]$.
3. Donner les équations des tangentes T_0 et T_1 à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 1.
   En 0 : $f'(0) = 0$ et $f(0) = -1$ donc la tangente T_0 a pour équation $y = -1$.
   En 1 : $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 0$ donc la tangente T_1 a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
4. La courbe de f admet-elle une asymptote? Le cas échéant préciser son équation.
   Cherchons la limite de $f(x)$en $+\infty$.
   Quotient des monômes de plus haut degrés : $\dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$
   donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{3}$ en $+\infty$.
5. Tracer les deux tangentes T_0 et T_1 et la courbe de f.
6. Déterminer l'image J de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction f.
   f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc l'image de l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par f est l'intervalle $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right[$.
7. On note $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$, et g la fonction réciproque de $\tilde{f}$.
   Donner l'expression de $g(y)$ pour tout $y \in \mathrm{J}$.



$\tilde{f}(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{3x^2+1} = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y(3x^2+1) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y+1}{1-3y} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{y+1}{1-3y}}$, car $x \geq 0$,

donc pour tout $y \in \left[-1, \dfrac{1}{3}\right[$, $g(y) = \sqrt{\dfrac{y+1}{1-3y}}$.

8. Donner la valeur de $g'(0)$.

   $g'(0) = \dfrac{1}{\tilde{f}' \circ g(0)} = \dfrac{1}{f'(1)} = 2.$