Exercice 1

On appelle « nombres triangulaires » les nombres obtenus par une somme de la forme $1+2+3+\cdots+n$, et « nombres carrés » les nombres de la forme n^2, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner les dix premiers nombres triangulaires et les dix premiers nombres carrés.
2. Montrer que la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est toujours un nombre carré.
3. Trouver un nombre à la fois triangulaire et carré, autre que 1.
4. Cherchons d'autres nombres qui soient à la fois triangulaire et carré.
   (a) Expliquer pourquoi un tel nombre peut s'écrire à la fois sous la forme $\dfrac{t(t+1)}{2}$ et sous la forme s^2, où $t, s \in \mathbb{N}^*$.
   (b) On pose $x = 2t+1$ et $y = 2s$. Montrer que $x^2 - 2y^2 = 1$ (équation de Pell-Fermat).
   (c) Montrer que si (x, y) est une solution de cette équation, alors x est impair, y est pair, et x et y sont premiers entre eux.
   (d) Montrer que si (x, y) est une solution de cette équation, alors $(3x+4y, 2x+3y)$ est également une solution.
   (e) Trouver deux autres nombres qui soient à la fois carré et triangulaire.

Exercice 2

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3

Montrer que la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 4

Combien y a-t-il de nombres premiers ? Le prouver.

Exercice 5 : Critères de divisibilité

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $m = \sum_{k=0}^{n} m_k 10^k$, avec $m_0, \ldots, m_n \in \{0; \ldots; 9\}$, son écriture en base 10.

1. Par 2 ou par 5.
   (a) Montrer que 2 divise m si et seulement si 2 divise m_0.
   (b) Montrer que 5 divise m si et seulement si 5 divise m_0 si et seulement si $m_0 \in \{0; 5\}$.
2. Par 4. Montrer que m est multiple de 4 ssi $m_1 m_0$ est multiple de 4.
3. Par 9 ou par 3.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists Q_n \in \mathbb{N}, 10^n - 1 = 9Q_n$.

(b) En déduire le reste de la division euclidienne de $10^n - 1$ par 3 ou par 9.

(c) Montrer alors que 3 divise m si et seulement si 3 divise $\sum\limits_{i=0}^{n} m_i$.

(d) Montrer alors que 9 divise m si et seulement si 9 divise $\sum\limits_{i=0}^{n} m_i$

4. Montrer que 11 divise m si et seulement si 11 divise $P_n = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i m_i$.

Exercice 6 : Décomposer en produit de facteurs premiers

a) 105 b) 1024 c) 273 d) 1125

Exercice 7

1. Trouver trois nombres entiers naturels qui ont un nombre impair de diviseur.
2. Formuler une conjecture.
3. Étant donné un nombre entier n et sa décomposition en produit de facteurs premiers $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$, exprimer le nombre de diviseurs de n en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.
4. Démontrer la conjecture.

Exercice 8 : Calcul d'une racine carrée à la main

Voici un extrait d'un manuel de 1910 pour le cour supérieur (11 à 13 ans) :

217. — Soit à extraire la racine carrée de 1 389.

13.8 9	37
4 8.9	67
4 6 9	7
2 0	469

Le plus grand carré contenu dans 13 est 9, dont la racine carrée est 3. Je pose 3 à la racine : — 3 fois 3 font 9 ; 9 ôtés de 13, il reste 4.

J'abaisse la tranche suivante, 89. — Je sépare le chiffre 9 sur la droite de 489 ; je double le chiffre 3 de la racine, ce qui fait 6, et je dis : En 48, combien de fois 6 ? Il y est 7 fois. Je place 7 à la droite de la racine, ce qui fait 37, et à la droite de 6, ce qui fait 67, et je multiplie 67 par 7. Le produit 469 peut se retrancher de 489, et donne 20 pour reste. Ce reste 20 n'est pas plus grand que 2 fois 37 ; donc le chiffre 7 est bon. Donc la racine cherchée est 37, à moins d'une unité.

Appliquer cet algorithme pour calculer, à la main :

1. $\sqrt{5\,275}$ à l'unité près par défaut.
2. $\sqrt{61\,344}$ à l'unité près par défaut.

3. $\sqrt{541}$ au centième près par défaut.
4. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ au millième près par défaut.

Exercice 9 : Algorithme de Héron

L'algorithme suivant permet d'approcher la racine carrée d'un nombre a.

```
affecter à u la valeur 1
demander la valeur de a
demander la valeur de n
pour k allant de 1 à n faire :
        affecter à u le résultat de 1/2 (u + a/u)
afficher u
```

Appliquer l'algorithme avec $a = 3$ et $n = 3$, puis avec $a = 2$ et $n = 3$. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4 de l'exercice précédent.

Exercice 10

Montrer que $\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n$ est un nombre entier pair, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

a) 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ b) 169 divise $3^{3n+3} - 26n - 27$

Exercice 12 : Calculer le pgcd et le ppcm des nombres suivants.

a) 84 et 90 b) 364 et 495 c) 1924 et 728 d) 7425 et 3780

e) 2^n et $3 \times 2^{n-1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ f) n et $n+1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ g) $n!$ et $(n+1)!$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 13

1. Un entier relatif x a pour reste 12 dans la division euclidienne par 17. Ce même entier a le même quotient dans la division euclidienne par 19, mais le reste est alors 4. Déterminer la valeur de x.
2. Dans $\mathbb{N}$, existe-t-il une division où le quotient est 90, le reste 11, et où le dividende est inférieur à 1000 ?
3. Déterminer tous les entiers naturels qui, divisés par 7 , donnent un quotient égal au reste.

Exercice 14

Un nombre est dit parfait si la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à lui même.

1. Démontrer que si $m = 2^n - 1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1}m$ est un nombre parfait.
2. Donner trois nombres parfaits.

Exercice 15

Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $|x-2| \leq 3$ b) $|2x+1| \leq \dfrac{3}{2}$ c) $|X+3| > 4$ d) $|x-3| < |x+8|$

Exercice 17 : Déterminer l'ensemble de définition et résoudre.

a) $\dfrac{x(x+3)}{x-1} \geq 0$ b) $x^3 - x^2 + x - 1 < x^2 - x$ c) $e^{3x} \leq 3e^x$ d) $(\ln x)^2 > 3\ln x$

Exercice 18 : Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\lfloor x \rfloor = 3$ b) $\lfloor x \rfloor = \lfloor 4-x \rfloor$ c) $\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$

Exercice 19

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
2. Donner un exemple d'égalité et un exemple d'inégalité stricte.

Exercice 20

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

a) $A = \left]-\sqrt{2}, 2\right]$ b) $B = \{\sin x, x \in]0,\pi[\}$ c) $C = \left\{\sin\dfrac{1}{x}, x \in]0,\pi[\right\}$ d) $D = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

e) $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ f) $F =]0,1[\cap \mathbb{Q}$ g) $G = \left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 21 : Un théorème du point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante.
On veut montrer que f a nécessairement un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
Pour cela on pose $E = \{x \in [0,1], f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure notée α qui est dans $[0,1]$.
2. Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de E ; en déduire que $f(\alpha) \geq \alpha$.
3. En déduire que $f(\alpha) \in E$ et conclure que $f(\alpha) = \alpha$.