CHAPITRE 9

Nombres entiers et nombres réels

Sommaire

L'arithmétique, sous sa forme abstraite et spéculative de raisonnements sur les propriétés des nombres, est une science très ancienne, étudiée dès le V^{e} siècle avant J.-C. en Grèce antique par exemple. Elle a connu un regain d'intérêt de la part des mathématiciens à partir du milieu du XIX^{e} siècle, en particulier en remplaçant la géométrie dans son rôle de fondement des mathématiques. Elle est très utilisée en théorie du codage.
Les nombres que nous appelons « nombres réels », et en particulier les nombres irrationnels, sont utilisés à la suite de l'invention de l'algèbre, la science des équations, dans l'empire arabe à partir du IX^{e} siècle. Mais les savants ne savent pas bien dire ce que sont ces nombres, ce jusqu'à la deuxième moitié du XIX^{e} siècle, lorsque plusieurs mathématiciens comme Richard Dedekind (1831-1916) ou Georg Cantor (1845-1918) proposent des constructions logiques des nombres réels.

I Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Définition 1 : Multiple et diviseur

Dès lors que $n = a \times b$, où n, a, et b sont trois entiers naturels, on dit que :
- a est un **diviseur** de n ;
- n est un **multiple** de a.

Exemples :
- ▷ 24 est un multiple de 8, et 8 est un diviseur de 24.
- ▷ Tous les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Théorème 1 : Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Pour tous nombres entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$, il existe un unique couple (q, r) de deux nombres entiers naturels tel que : $a = b \times q + r$, avec $0 \leq r < b$.
q s'appelle le **quotient** dans la division euclidienne de a par b
r s'appelle le **reste** dans la division euclidienne de a par b.

Opérateurs Python : Quotient / Reste

```
>>> 26//5
5
>>> 26%5
1
```

Définition 2 : PGCD et PPCM

Étant donnés deux nombres entiers m et n, on appelle :

- $\text{pgcd}(m,n)$ le plus grand commun diviseur de m et de n
- $\text{ppcm}(m,n)$ le plus petit commun multiple de m et de n

Exemple :

▷ $\text{pgcd}(24,36) = 12$, $\text{ppcm}(15,35) = 105$.

Théorème 2 : Algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd (différences)

Demander la valeur de a
Demander la valeur de b
Tant que $a \neq b$ Faire :
  si $a < b$,
    intervertir a et b
  affecter $a - b$ à la variable a
Afficher b

```
a = input("a");a = int(a)
b = input("b");b = int(b)
while a!=b:
    if a < b:
        a,b = b,a
    a = a - b
print(b)
```

Théorème 3 : Algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd (divisions)

Demander la valeur de a
Demander la valeur de b
Tant que a n'est pas un multiple de b Faire :
  affecter à a et b respectivement la valeur de b et le reste de la div. eucl. de a par b
Afficher b

```
a = input("a");a = int(a)
b = input("b");b = int(b)
while a%b!=0:
    a,b = b,a%b

print(b)
```

Théorème 4 (admis)

Pour tous nombres entiers m et n, $\text{pgcd}(m,n)\times\text{ppcm}(m,n) = m \times n$

Définition 3 : Nombre premier

Un nombre entier naturel non nul n est appelé **nombre premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemple :

▷ Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.

Théorème 5 (admis) : Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel n s'écrit de manière unique comme un produit de nombres premiers.

Exemple :

▷ La décomposition de 24 en produit de facteurs premiers est : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$.

II Propriétés des nombres réels

1 Ensembles de nombres

Définition 4 : Les ensembles de nombres

On désigne par des notations particulières certaines parties de $\mathbb{R}$:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.
$\mathbb{D} = \left\{\frac{k}{10^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux.
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m}, (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Remarque :
- ▷ Le/la lecteur/trice attentif/ve et astucieux/se aura noté que nous n'avons pas précisé ce qu'est un nombre réel ... On peut imaginer que les nombres réels sont toutes les abscisses des points d'une droite munie d'un repère.

2 Parties de $\mathbb{R}$

Définition 5 : Majorant et minorant

Étant donnée une partie A de $\mathbb{R}$,

- on appelle **majorant** de A tout nombre réel M tel que : $\forall a \in A, \quad a \leq M$.
  Lorsqu'un tel nombre existe, on dit que la partie A est **majorée**.
- on appelle **minorant** de A tout nombre réel m tel que : $\forall a \in A, \quad m \leq a$.
  Lorsqu'un tel nombre existe, on dit que la partie A est **minorée**.

Exemples :
- ▷ L'intervalle $]-\infty; 2]$ est majoré par 2, mais pas minoré.
- ▷ L'intervalle $]-1; 1[$ est majoré par 1, et minoré par -1.
- ▷ L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, k^2 \leq 1\,000\}$ est majoré par 40.
- ▷ L'intervalle $]0; +\infty[$ ou encore l'ensemble $\mathbb{N}$ ne sont pas majorés.

Remarque :
- ▷ Une partie majorée A de $\mathbb{R}$ admet une infinité de majorants. Par exemple, tous les nombres $M \geq 1$ sont des majorants de la partie $]-1; 1[$.

Définition 6 : Maximum et minimum

Étant donnée une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle :

- **maximum** de A un nombre réel M appartenant à A et qui est un majorant de A.
- **minimum** de A un nombre réel m appartenant à A et qui est un minorant de A.

Remarque importante et subtile :
- ▷ Une partie majorée n'admet pas toujours un maximum.
  Par exemple, l'intervalle $]-1; 1[$ est majoré mais n'admet pas de maximum.

Définition 7 : Borne supérieure et borne inférieure

Étant donnée une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle :

— **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, un nombre S tel qu'on ait à la fois :
  - pour tout $a \in A$, $\quad a \leq S$
  - pour tout majorant M de A, $S \leq M$

— **borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, un nombre s tel qu'on ait à la fois :
  - pour tout $a \in A$, $\quad s \leq a$
  - pour tout minorant m de A, $m \leq s$

Théorème 6 (admis)

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exemples :

▷ L'intervalle $]0;2[$ est majorée. Sa borne supérieure est 2.

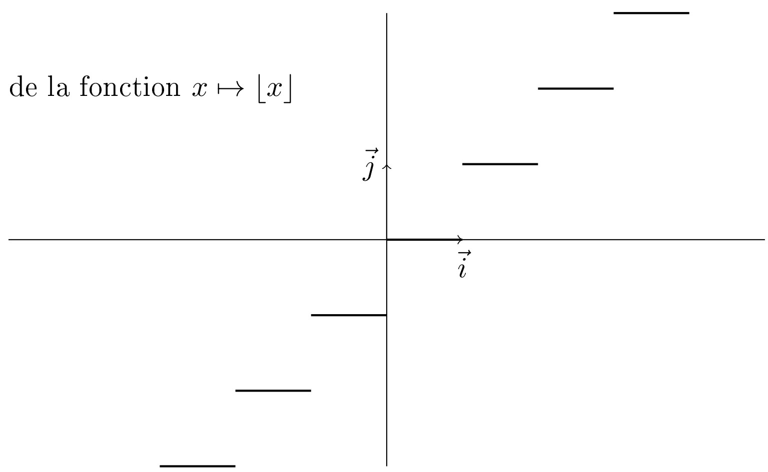
▷ L'ensemble $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minoré. Sa borne inférieure est 0.

III Partie entière et approximations décimales

Définition 8 : Partie entière

On appelle **partie entière** d'un nombre réel x, et on note $\lfloor x \rfloor$, l'unique nombre entier n tel que $n \leq x < n+1$.

Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$



Définition 9

Pour tout nombre réel x, $\lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près, et $\lfloor 10^n x + 1 \rfloor 10^{-n}$ est une valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près.

Exemple : 3,1415 est une approximation de π à 10^{-4} près par défaut et 3,1416 est une approximation de π à 10^{-4} près par excès.