NOM : ....

Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide (III^e siècle av. J-C) permet de trouver le PGCD de deux entiers.

1. Programmer l'algorithme d'Euclide.
2. L'utiliser pour trouver le PGCD de 226 411 et de 168 139 (réponse 1).

Crible d'Erathostène

La méthode dite du crible d'Eratosthène (276-194 av. J.-C.) est une méthode de recherche de nombres premiers. Elle consiste, dans une liste de nombres entiers allant de 2 à un nombre donné n, à supprimer tous les multiples de 2 strictement supérieurs à 2, puis tous les multiples de 3 strictement supérieurs à 3, etc.
Écrire un programme qui utilise cette méthode pour obtenir la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un nombre n donné par l'utilisateur.
Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à 10 000 ? (réponse 2)

Test de primalité

1. Écrire une fonction `premier(m,n)` qui renvoie `true` si les entiers naturels m et n sont premiers entre eux, et `false` sinon.

2. Écrire une fonction `decompo(n)` qui renvoie, lorsque n n'est pas premier, une décomposition de n sous forme d'un produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

3. 16 999 est-il premier ? Dans le cas contraire écrire ce nombre sous forme d'un produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2 (réponse 3).

Applications

Nombres de Fermat

On appelle nombre de Fermat (1607-1665) les nombres de la forme $1+2^{2^n}$, où n est un nombre entier naturel.

1. Calculer les trois premiers nombres de Fermat, et vérifier que ce sont des nombres premiers.
2. Les nombres de Fermat sont-ils tous des nombres premiers ? Dans le cas contraire donner un nombre de Fermat non premier (réponse 4).

Nombre de Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648) est un moine français érudit et passionné de mathématiques. On appelle nombres de Mersenne les nombres de la forme $\mathrm{M}_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel non nul. Aujourd'hui, le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne, découvert dans le cadre du projet GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search).

1. Calculer les six premiers nombres de Mersenne. Sont-ils tous premiers ?
2. Montrer que pour tous nombres entiers non nuls k et l,

$$2^{k\times l}-1=\left(2^k-1\right)\sum_{j=0}^{l-1}2^{j\times k}$$

3. En déduire que si un nombre de Mersenne M_n est premier alors n est premier.
4. La réciproque est-elle vraie ? (réponse 5)

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :	Réponse 4 :	Réponse 5 :