Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 : Coefficients constants.

Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants :

a) $y' + 2y = 0$ b) $y' - y = 2$ c) $2y' + y + 1 = 0$

Exercice 2 : Équation homogène.

Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre homogènes :

a) $x^2 y' + 2y = 0$, $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ b) $y' + 4xy = 0$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ c) $x^2 y' + (2x-1)y = 0$, $\mathrm{I} =]0, +\infty[$

Exercice 3 : Cas général, méthode de variation de la constante.

Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre :

a) $y' + y + 1 = e^x$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ b) $(1-x^2)y' + 2xy + 2x = 0$, $\mathrm{I} =]-1, 1[$ c) $y' + 3y = e^{3t} + e^{-3t}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 4 : Problèmes de Cauchy.

Déterminer la solution des problèmes de Cauchy :

1. $\begin{cases} xy' + 2y = e^x \\ y(1) = 2 \\ \mathrm{I} =]0, +\infty[\end{cases}$ 2. $\begin{cases} y' + y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ \mathrm{I} = \mathbb{R} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} xy' + y = x^2 e^x \\ y(-1) = 0 \\ \mathrm{I} =]-\infty, 0[\end{cases}$

Exercice 5 : Fonctions à valeurs complexes

Résoudre les équations différentielles.

a) $y' - iy = 1$ b) $y' + 2ixy = x$

Exercice 6

On considère le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction z définie par $z(t) = x(t) - 2y(t)$ vérifie une équation différentielle que l'on résoudra.
2. En déduire une expression générale des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Vérifier qu'elles sont solution du système différentiel initial.
3. Résoudre le système sachant que $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 7 : Équation homogène.

Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ c) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Exercice 8 : Problèmes de Cauchy avec une équation homogène.

Résoudre les problèmes de Cauchy :

1. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.
2. $2y'' + y' - 10y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. $4y'' - 12y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9 : Équation avec second membre en $\mathrm{A}e^{\lambda x}$.

Déterminer une solution particulière puis la solution générale des équations différentielles.

a) $y'' + y' + y = e^x$ b) $y'' + 4y = -e^{2x}$ c) $y'' + y' - 6y = -2e^{-3x}$ d) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$

Exercice 10 : Équation avec second membre en $\mathrm{A}\cos(\omega t)$ ou $\mathrm{A}\sin(\omega t)$.

Déterminer une solution particulière puis la solution générale des équations différentielles.

a) $y'' + y' + 2y = 2\cos(2t)$ b) $y'' + y = \sin t$ c) $y'' - 3y' + 2y = 4\sin(2t)$

Exercice 11 : Problème de Cauchy

Déterminer la solution des problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = -e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y'' - y' + y = 2\cos x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y'' + 2y = \sin(3t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \dfrac{11}{7} \end{cases}$

Exercice 12

On considère l'équation différentielle (E) : $4x^2y'' + y = 1$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. En déduire la forme générale de g.
3. En déduire la forme générale de f.
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$.