Primitives de fonctions usuelles

Exercice 1 : Primitives usuelles.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}$ sur $\mathrm{I} =]-\infty, 0[$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{1+x^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$

c) $f(x) = -\dfrac{3}{4}\cos x - 5e^x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ d) $f(x) = x - \dfrac{2}{3\sqrt{1-x^2}}$ sur $\mathrm{I} =]-1, 1[$

e) $f(x) = \pi \sin x + e \ln x$ sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ f) $f(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3x^2\sqrt{x}}$ sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$

Exercice 2 : Primitive définie par une valeur.

Déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie la condition donnée.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{x^3}$ et $\mathrm{F}(1) = 2$, sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ b) $f(x) = \sqrt{x} - \tan^2 x$ et $\mathrm{F}(0) = 1$, sur $\mathrm{I} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3 : Transformation de l'écriture de f.

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur I.

a) $f(x) = (x^2+1)^3$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ sur $\mathrm{I} =]-\infty, 0[$ c) $f(x) = \left(1+e^x\right)^2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ e) $f(x) = \cos^2 x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ f) $f(x) = \cos x \sin(2x)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 4 : Calculer les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^3\right) dt$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{3x+2}{\sqrt{x}} dx$ c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$

Intégration par parties

Exercice 5 : Calculer les intégrales.

a) $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)\ln(x) dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 x \,\mathrm{ch}(x) dx$

Exercice 6 : Calcul de primitives.

Déterminer une primitive de la fonction f ainsi que l'intervalle maximal I sur lequel elle est valide.

a) $f(x) = \left(x^2 - x + 3\right)e^{2x}$ b) $f(x) = \left(\ln(x)\right)^2$ c) $f(x) = (2x-3)\sin x$ d) $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x$

Primitives sous forme de fonctions composées

Exercice 7

En reconnaissant la dérivée d'une fonction composée, déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie la condition donnée.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, avec $\mathrm{F}(0) = 1$.
2. $f(x) = 2\sqrt{3x+1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$, avec $\mathrm{F}(5) = 100$.
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, avec $\mathrm{F}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Exercice 8 : Calculer les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin x \, dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2xe^{1-x^2} \, dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos(3\theta) \, d\theta$ d) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x}{(x^2+1)^2} \, dx$

Exercice 9 : Primitives des fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

Déterminer l'ensemble de toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ sur $\mathrm{I} =]-1, +\infty[$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-6}$ sur $\mathrm{I} =]2, 3[$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+4x+5}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{2x^2+x-3}$ sur $\mathrm{I} =]1, +\infty[$

e) $f(x) = -\dfrac{2}{4x^2+4x+1}$ sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ f) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+2x+5}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 10 : Calculer les intégrales.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{2}{4x^2-4x+17} \, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{7}{9x^2+6x+1} \, dx$ c) $\displaystyle\int_2^{8} \frac{5}{x^2+3x-4} \, dx$ d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x^2+4x}$

e) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{3x^2+4}$ f) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+4}$ g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{-3x} \cos(2x) \, dx$

Exercice 11 : Changement de variable.

Déterminer une primitive de la fonction f sur I en effectuant le changement de variable indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{x^5}{1+x^{12}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $u = x^6$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $u = \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ avec $u = \sqrt{1+e^x}$ d) $f(t) = \dfrac{1}{e^t - 2 + 3e^{-t}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ avec $u = e^t$

Exercice 12 : Changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ avec $u=\ln t$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ avec $u=\cos x$.
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ avec $u=\sqrt{x}$.

Approfondissement

Exercice 13

1. Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que l'on ait pour tout nombre réel x distinct de 0 et de -1 :
$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}dx$.

Exercice 14

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n=\int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}dt$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $g : t\mapsto \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$. En déduire I_0.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{I}_{n+2}+\mathrm{I}_n=\mathrm{J}_n$.
4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{I}_{n+2}=\sqrt{2}-(n+1)\mathrm{J}_n$$
5. Déduire des questions précédentes, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n, puis calculer I_2 et I_3.

Exercice 15 : Changement de variables

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variables indiqué :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ avec $u = x-1$.
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}\,\mathrm{d}x$ avec $u = \dfrac{1}{x^2}$.
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \cos\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$.
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,\mathrm{d}x$ avec $u = \sin x$.
5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^7 x\,\mathrm{d}x$ avec $u = \cos x$.
6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\theta\cos x}$ avec $u = \tan\dfrac{x}{2}$ et $\theta \in]0,\pi[$.

Exercice 16 : Calcul de primitives

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $\mathrm{I} =]-1,1[$
2. $f(x) = 2x\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$
3. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2}$ sur $\mathrm{I} =]0,+\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ sur $\mathrm{I} = \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$
6. $f(x) = x\cos\left(x^2-1\right)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]-\infty,0[$
8. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
9. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$