CHAPITRE 7

Calcul de primitives

Sommaire

Dans tout le chapitre, I est un intervalle non vide quelconque de $\mathbb{R}$.

I Définition et primitives usuelles

Définition 1 : Primitive

On appelle **primitive** d'une fonction f définie sur I à valeurs réelles ou complexes toute fonction F définie et dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Primitives à connaître par cœur :

Fonction	Primitive	Intervalle I
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^{-n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$	$x \longmapsto \dfrac{1}{-n+1}x^{-n+1}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln\lvert x\rvert$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0;+\infty[$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}$
$x \longmapsto \ln x$	$x \longmapsto x\ln x - x$	$]0;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$	$x \longmapsto \arctan x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \arcsin x$	$]-1;1[$

II Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 : Primitive et opérations

Étant données deux fonctions f et g définies sur I et possédant sur cet intervalle des primitives F et G.
Pour tous nombres réels ou complexes λ et μ, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Exemple :

▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2e^x$ admet comme primitive $F : x \mapsto x^3 - 2e^x$.

Théorème 2 (admis)

Toute fonction F définie et dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est identiquement nulle sur I est une fonction constante.

Corollaire 1 : Ensemble des primitives d'une fonction

Étant donnée une fonction f définie sur I qui admet une primitive F sur cet intervalle, l'ensemble de toutes les primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + C$, où C est un nombre réel ou complexe.

Démonstration :
Les fonctions de la forme $F + C$, où C est une constante, sont clairement des primitives de f sur I.
Réciproquement, soit G une primitive quelconque de f sur I.
Alors la fonction $x \mapsto G(x) - F(x)$ a une dérivée nulle sur I,
donc $G - F$ est une fonction constante égale à un nombre réel ou complexe C, donc $G = F + C$.

Exemple :

▷ Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos x$ sont les fonctions de la forme $F : x \mapsto \sin x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2 : Unicité de la primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur cet intervalle, x_0 un nombre de I et y_0 un nombre réel ou complexe quelconque.
Alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration :
<u>Existence</u> : Soit $G = F - F(x_0) + y_0$. On a $G' = F' = f$ et $G(x_0) = F(x_0) - F(x_0) + y_0 = y_0$.
<u>Unicité</u> : Soient G et H deux primitives de f sur I telles que $G(x_0) = H(x_0) = y_0$.
Il existe deux nombres réels ou complexes C et Γ tels que $G = F + C$ et $H = F + \Gamma$.
Donc $G(x_0) = F(x_0) + C = y_0$ et $H(x_0) = F(x_0) + \Gamma = y_0$.
Donc $C = y_0 - F(x_0) = \Gamma$, donc $G = H$.

Exemple :

▷ L'unique primitive F de la fonction $f : x \mapsto \cos x$ telle que $F(0) = 1$ est la fonction $F : x \mapsto \sin x + 1$.

Théorème 3 (admis)

Toute fonction f continue sur I y admet des primitives.
On note alors $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ la primitive de f sur I qui s'annule en $x_0 \in I$.

Remarque :

▷ On note plus généralement $\displaystyle\int f(t)dt$ une primitive quelconque de la fonction f, sur un intervalle qu'il faut alors préciser.

Corollaire : Calcul d'intégrales

Pour toute fonction f continue sur I, dont une primitive est F sur I, et pour tous nombres $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration :
Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto F(x) - F(a)$ sont deux primitives de f sur I, qui valent toutes les deux 0 en $x = a$.
Donc ces fonctions sont égales sur I. Pour $x = b$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Exemples :

▷ $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet comme primitive sur $I = [0, 1]$ la fonction $F : x \mapsto \ln(1+x)$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = F(1) - F(0) = \ln 2$.
On écrit généralement dans les calculs la primitive entre crochets :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

▷ On peut utiliser le signe intégral dans le calcul de primitives :
$\displaystyle\int \tan^2 t \, dt = \tan t - t$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

III Techniques de calcul

Si l'on dispose d'un algorithme pour dériver toute fonction définie par une expression algébrique, on ne sait en revanche pas toujours trouver la primitive d'une telle fonction. Lorsque la fonction n'est pas une combinaison linéaire des fonctions usuelles du tableau de la première page, on dispose de deux techniques pour trouver une primitive et calculer une intégrale :

1. Effectuer une intégration par parties ;
2. Reconnaître la dérivée d'une fonction composée.

Intégration par parties

L'idée ici est de lire « à l'envers » la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

Définition 2

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque :
- f est continue sur I
- f est dérivable sur I
- f' est continue sur I

Théorème 4 : Intégration par parties

Pour toutes fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration :
La fonction $x \mapsto u(x)v(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
donc $\displaystyle\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)dx = [u(x)v(x)]_a^b$

Exemples :

▷ Cherchons à calculer $\displaystyle\int_1^2 2x\ln x dx$: on ne connaît pas de primitive de $x \mapsto x\ln x$.
On pose $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln x$, d'où $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
u et v sont bien deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1;2]$.
Alors $\displaystyle\int_1^2 2x\ln x dx = \left[x^2\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 x^2\frac{1}{x}dx = 4\ln 2 - \int_1^2 x dx$, que l'on sait calculer !

▷ L'intégration par parties permet aussi de calculer les primitives :
$\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$ sur $I = \mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Dérivée d'une fonction composée

Théorème 5 (rappel)

Soient u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans un intervalle J, et G une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
Alors la fonction $G \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(G \circ u)'(x) = u'(x) \times G' \circ u(x)$.

Méthode : on lit ce théorème « à l'envers » pour trouver des primitives.

▷ Exemple : soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\lambda x}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
On écrit $f(x) = \dfrac{1}{\lambda} \times \lambda e^{\lambda x} = \dfrac{1}{\lambda} \times u'(x) \times g \circ u(x)$,
avec $u(x) = \lambda x$, $g(x) = e^x$ qui admet pour primitive $G(x) = e^x$.
Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \dfrac{1}{\lambda} G \circ u(x) = \dfrac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$.

▷ Application : Primitive des fonctions $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \neq (0,0)$.
On a $f(x) = \text{Re}\left[e^{(a+ib)x}\right]$, qui admet pour primitive $F(x) = \text{Re}\left[\dfrac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}\right] =$ $\text{Re}\left[\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big)\right] = \dfrac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos(bx) + \dfrac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx)$.

Méthode : Primitive des fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, et $a \neq 0$.
On calcule le discriminant Δ du trinôme.
Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = \dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$ et admet pour primitive sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$ la fonction $F : x \mapsto -\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{x-x_0}$.
Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ se met sous la forme $\dfrac{\lambda}{x-x_1} - \dfrac{\lambda}{x-x_2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et admet pour primitive la fonction $F : x \mapsto \lambda \ln|x-x_1| - \lambda \ln|x-x_2|$ sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ et $]x_2, +\infty[$.
Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ se met sous la forme $\dfrac{\lambda}{(\alpha x+\beta)^2+1}$, avec $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\alpha}\arctan(\alpha x+\beta)$.

Cette méthode consistant à reconnaître la dérivée d'une fonction composée peut être formalisée sous la forme d'un théorème général :

Théorème 6 : Théorème de changement de variables

Étant donnée une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et une fonction f continue sur l'intervalle $\varphi(I)$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt \qquad \text{pour tous } a, b \in I$$

Démonstration :
Notons F une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

Exemples :

- ▷ Soit à calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t\, dt$
  On pose $f(x) = x^4$ et $\varphi(t) = \sin t$. On a donc $\varphi'(t) = \cos t$. D'où :
  $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$
- ▷ Cette méthode permet également de calculer des primitives, et nous allons employer pour ce deuxième exemple la notation « à la physicienne » :
  Soit à calculer $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
  On pose $u = 1+x^2$. D'où $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ et :
  $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.