Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = e^z$.
f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2$.

1. Déterminer $f([0;+\infty[)$ et $f^{-1}([0;+\infty[)$.
2. Quelle est l'image B de $\mathbb{R}$ par f ?
3. f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans B ? Le cas échéant, expliciter f^{-1}.

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Déterminer l'image J de $\mathbb{R}$ par f.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans J et expliciter son application réciproque.

Exercice 4

On considère l'ensemble $\mathscr{S}_3$ de toutes les bijections de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans lui-même. On définit $u, v \in \mathscr{S}_3$ par :

- $u(1) = 2$, $u(2) = 1$ et $u(3) = 3$;
- $v(1) = 2$, $v(2) = 3$ et $v(3) = 1$.

1. Déterminer les applications $u^2 = u \circ u$ et u^{-1}.
2. Déterminer les applications v^2, v^3 et v^{-1}.
3. Est-ce que $u \circ v = v \circ u$?

Exercice 5

On considère les applications f et g de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\{0,1,2,3,4\}$ définies par :

- $f(n)$ est le reste de n dans la division euclidienne par 5.
- $g(n)$ est le reste de n^2 dans la division euclidienne par 5.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. g est-elle injective ? surjective ?
3. Préciser l'image directe de $\mathbb{N}$ par g et l'image réciproque de $\{1\}$ par g.

Exercice 6

Déterminer l'image de A par l'application f :

1. $A = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \cos x \sin x \end{array} \right.$
2. $A = \mathbb{N}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \text{reste de la division euclidienne de } n \text{ par } 7 \end{array} \right.$
3. $A = 1 + i\mathbb{R}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$

   On pourra montrer que l'image de A est incluse dans le cercle de diamètre [OI], où O et I sont les points d'affixes respectives 0 et 1.

Exercice 7

Déterminer l'image réciproque de B par l'application f :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{array} \right.$ et $B = [0, 2]$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ et $B = [0, +\infty[$
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1 - 2x}{1 + x} \end{array} \right.$ et $B = [-1, 1]$

Exercice 8

Montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) = z + 2\bar{z}$ est bijective, et expliciter son application réciproque, également sous la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

On considère les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans lui-même définies par :

- $f(k) = 2k$ pour tout nombre entier naturel k ;
- $g(k) = \dfrac{k}{2}$ si k est pair et $g(k) = \dfrac{k-1}{2}$ si k est impair.

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
2. Expliciter $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 10

Montrer que l'application f définie de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 11

1. Peut-on trouver une application bijective entre les ensembles $\{0,1,2,3\}$ et $\{0,1,2,3,4,5\}$?
2. Peut-on trouver une application bijective entre les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$?
3. Peut-on trouver une application bijective entre les ensembles $]0,1[$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 12

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même par $f(x,y) = (2x+y, x^2+y)$.

1. f est-elle bijective ?
2. Montrer que la restriction $\tilde{f}$ de f à l'ensemble $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ est injective.
3. Montrer que l'image de $\tilde{f}$ est le demi-plan $\mathscr{P}$ d'équation $y - x + 1 \geq 0$.
4. Déterminer l'application réciproque $\tilde{f}^{-1}$ de $\mathscr{P}$ dans $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Vrai ou faux ?

Soit f une fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est strictement monotone, alors f est injective.
2. Si f est injective, alors f est strictement monotone.
3. La fonction f établit toujours une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.
4. La fonction f établit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$ si et seulement si f est injective .
5. Si f est injective et monotone, alors elle est strictement monotone.
6. Si f établit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$, alors f est strictement monotone