CHAPITRE 6

Applications

Sommaire

Depuis environ un siècle, les théories mathématiques sont très largement formulées dans le cadre de la théorie des ensembles, fondée sur la notion a priori très intuitive d'ensemble.

I Notion d'application

Définition 1 : Application

Une **application** f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à tout élément x de E un unique élément de F, noté $f(x)$.

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

$f(x)$ est l'**image** de x, et x est un **antécédent** de y.
On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications de E dans F.

Remarque :

- ▷ L'application d'un ensemble E dans lui-même définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in E$ est appelée **application identité**.

Définition 2 : Application indicatrice

Étant donnée une partie A d'un ensemble E, on appelle **application indicatrice** de A, et on note $\mathbb{1}_A$, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathbb{1}_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ \mathbb{1}_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Exemple :

- ▷ $\mathbb{1}_{[0,2]}(0,6) = 1$ et $\mathbb{1}_{[0,2]}(3,1) = 0$.

Définition 3 : Restriction

Étant donnée une partie A d'un ensemble E, et une application f de E dans un ensemble F, on appelle **restriction** de f à A et on note $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par $f_{|A}(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

Définition 4 : Image directe et réciproque

Étant données une application $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F, on appelle :

- **image directe** de A l'ensemble $f(A) = \big\{f(x), \quad x \in A\big\}$.
- **image réciproque** de B l'ensemble $f^{-1}(B) = \big\{x \in E, \quad f(x) \in B\big\}$.

On a bien sûr $f(A) \subset F$ et $f^{-1}(B) \subset E$.

Exemple :

▷ Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
L'image de l'intervalle $[-1, 3]$ est $f([-1, 3]) = [0, 9]$.
L'image réciproque de l'intervalle $[1, 4]$ est $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

Définition 5 : Composition

Étant données deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$, la composée de g avec f, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G définie par $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

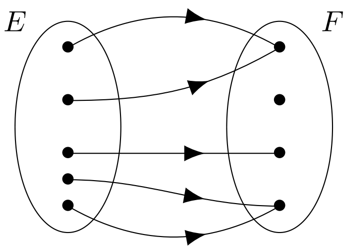
Exemple :

▷ Soit $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et g de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$.
Alors $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $g \circ f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

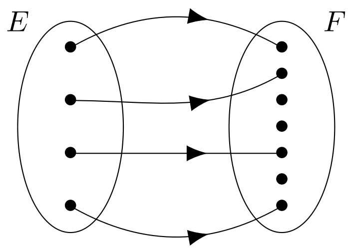
II Application injective, surjective, bijective

Définition 6 : Application injective

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite **injective** lorsque tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f dans E.



Application non injective



Application injective

Exemple :

▷ L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective car le nombre 4 a deux antécédents, 2 et -2. Par contre sa restriction à l'intervalle $[0; +\infty[$ est injective.

▷ L'application de l'ensemble des personnes de nationalité française dans l'ensemble de tous les prénoms possibles qui à une personne associe son prénom n'est pas injective car un même prénom peut correspondre à plusieurs personnes.

Théorème 1 : Caractérisation d'une application injective

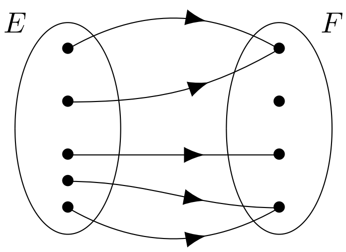
$$\begin{aligned} f : E \to F \text{ est injective} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x, x' \in E, \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \end{aligned}$$

Théorème 2 : Compositions de deux injections

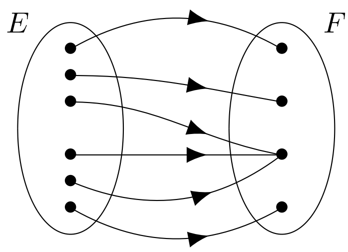
La composée de deux applications injectives est une application injective.

Définition 7 : Application surjective

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite **surjective** lorsque tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f dans E.



Application non surjective



Application surjective

Exemple :

- ▷ L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car le nombre -1 n'a pas d'antécédent. Par contre l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0; +\infty[$ est surjective.
- ▷ L'application de l'ensemble des personnes de nationalité française dans l'alphabet qui à une personne associe la première lettre de son nom est surjective.

Théorème 3 : Caractérisation d'une application surjective

$$\begin{aligned} f : E \to F \text{ est surjective} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad f(E) = F \end{aligned}$$

Théorème 4 : Compositions de deux surjections

La composée de deux applications surjectives est une application surjective.

Définition 8 : Application bijective

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite **bijective** lorsque tout élément de F possède **un et un seul** antécédent dans E.
Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.
On définit alors l'**application réciproque** de f, notée f^{-1}, de F dans E, qui associe à tout élément y de F son unique antécédent par l'application f.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \\ f^{-1}(y) & \longleftarrow\!\shortmid & y \end{array}$$

Exemples :

- ▷ L'application $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective, et son application réciproque est $f^{-1} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
- ▷ L'application $D : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $D(n) = \lfloor \dfrac{(-1)^n \times n}{2} \rfloor$ est bijective.

Théorème 5

La composée de deux applications bijectives est une application bijective.
Attention à l'ordre : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.