Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les 3 équations qui suivent :
   (a) $\cos(3x) = \cos(x)$
   (b) $\sin(2x) + \sin(4x) = \cos(x)$
   (c) $1 - \cos(2x) = \sqrt{2}\sin(x)$
2. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x - \sin x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 2

Soient a et b deux complexes distincts de module 1.
Pour tout complexe z, posons $X = \dfrac{z + ab\bar{z} - a - b}{a - b}$.
Montrer que X est imaginaire pur.

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
2. En déduire la partie entière de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}}$

Exercice 4

Donner une expression simplifiée des sommes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min\{i, j\}$

<u>Ex1</u> a) $\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 3x = x\ [2\pi]$ <u>ou</u> $3x = -x\ [2\pi] \Leftrightarrow 2x = 0\ [2\pi]$ <u>ou</u> $4x = 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow x = 0\ [\pi]$ <u>ou</u> $x = 0\ [\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = 0\ [\frac{\pi}{2}]$

Ainsi $\boxed{\cos 3x = \cos x \text{ si et seulement si } x = 0\ [\tfrac{\pi}{2}]}$

b) $\sin(2x) + \sin(4x) = 2 \sin 3x \cos(-x) = 2 \sin 3x \cos x$

Ainsi $\sin(2x) + \sin(4x) = \cos x \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow \cos x \left[2 \sin 3x - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ <u>ou</u> $\sin 3x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $3x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $3x = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}]$ ou $x = \frac{5\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}]$

$$\boxed{\text{Soit } \sin(2x) + \sin(4x) = \cos x \text{ si et seulement si } x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

c) $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ d'où $1 - \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$

$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x = \sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \left[\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ <u>ou</u> $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 0\ [\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ou $x = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$$\boxed{\text{Soit } 1 - \cos 2x = \sqrt{2} \sin x \text{ admet pour ensemble de solutions } \left\{ k\pi,\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

d) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d'où $\cos x - \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Par suite $\cos x - \sin x \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$

pour un $k \in \mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \right]$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } \cos x - \sin x \geq \sqrt{\tfrac{3}{2}} \text{ dans }]-\pi, \pi] \text{ est donc } \left[-\tfrac{5\pi}{12}, -\tfrac{\pi}{12} \right]}$$

Exercice 2

$$\overline{X} = \overline{\left(\frac{z+ab\bar z - a - b}{a-b}\right)} = \frac{\overline{z+ab\bar z - a - b}}{\overline{a-b}} = \frac{\bar z + \overline{ab\bar z} - \bar a - \bar b}{\bar a - \bar b}$$

$= \dfrac{\bar z + \bar a \bar b z - \bar a - \bar b}{\bar a - \bar b}$. Puisque a et b sont de module 1

on a $a\bar a = 1$ et $b\bar b = 1$. De fait

$$\overline{X} = \frac{\bar z + \frac{z}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab\bar z + z - b - a}{b-a}$$

$$= \frac{-ab\bar z - z + a + b}{a-b} = -\frac{z+ab\bar z - a - b}{a-b}$$

Ainsi $\boxed{\overline{X} = -X \text{ et } X \text{ est imaginaire pur}}$

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$:

   à gauche : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}-2n < 1 \Leftrightarrow 4n(n+1) < (2n+1)^2$
   $\Leftrightarrow 4n^2+4n < 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0 < 1$ donc c'est vrai.
   à droite : $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1} \Leftrightarrow 1 < 2n-2\sqrt{n(n-1)} \Leftrightarrow 4n^2-4n < 4n^2-4n+1$

2. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{10\,000} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{10\,000} \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

   donc $\displaystyle\sqrt{10\,001}-\sqrt{1} < \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{10\,000}$

   or $\sqrt{10\,000} = 100$ et $\sqrt{10\,001}-1 > 99$ car $\sqrt{10\,001} > 100$,

   donc la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ est 99.

Exercice 4

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{i,j\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}i^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)i$
$\displaystyle = -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et c'est assez troublant !