Exercice 1 : Calculer les sommes suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2+k+1$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5-4k$; c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k+1}{3}$; d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\times 5^{k+1}$; e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$.

Exercice 2 : Sommes télescopiques.

1. (a) Montrer que $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Utiliser une stratégie similaire pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times k!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

Calculer, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}|i-j|$.

Exercice 4 : Une somme triple.

Montrer que $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le k\le n}\frac{ik}{j}=\frac{n(n+1)(n^2+5n+2)}{16}$

Exercice 5

1. Soit $i\in\mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout entier k, tel que $i^2\le k\le (i+1)^2-1$, on a $\mathrm{E}(\sqrt{k})=i$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\mathrm{E}(\sqrt{k})=\frac{n(4n^2-3n+5)}{6}$

Exercice 6 : On veut calculer, pour tout nombre réel x et tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$

1. Traiter le cas où x est un multiple de 2π. Dans la suite, on suppose que $x\neq 0[2\pi]$.
2. Montrer que pour tous entiers naturels k et n tel que $0\le k\le n$,
   $2\sin\dfrac{x}{2}\cos(kx)=\sin\left((k+\dfrac{1}{2})x\right)-\sin\left((k-\dfrac{1}{2})x\right)$
3. Conclure.
4. Retrouver le résultat en remarquant que $\cos(kx)=\mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right)$ et en utilisant la somme d'une progression géométrique.

Exercice 7

1. Montrer que $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \tan a - \tan b$, en précisantles valeurs de a et b pour lesquelles cette égalité a un sens.
2. En déduire que $\dfrac{1}{\cos 0° \cos 1°} + \dfrac{1}{\cos 1° \cos 2°} + \cdots + \dfrac{1}{\cos 88° \cos 89°} = \dfrac{\tan 89°}{\sin 1°}$

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{n^3-1}{n^3+1} = \dfrac{(n-1)\big(n(n+1)+1\big)}{(n+1)\big(n(n-1)+1\big)}$.
2. En déduire une expression simplifiée de $\mathrm{P_N} = \prod_{2 \leq n \leq \mathrm{N}} \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, pour tout entier $\mathrm{N} \geq 2$.
3. En déduire que $\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{P_N} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 9

1. Trouver un polynôme P tel que $\mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) = x^2$.
2. Utiliser ce résultat pour retrouver l'expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 : Calculer les coefficients binomiaux.

a) $\dbinom{6}{2}$; b) $\dbinom{7}{3}$; c) $\dbinom{10}{1}$; d) $\dbinom{9}{7}$; e) $\dbinom{6}{0}$.

Exercice 11

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dbinom{n}{k}$

Exercice 12

1. Démontrer que pour tous nombres entiers k et n tels que $1 \leq k \leq n$, on a $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k}$