CHAPITRE 5

Calculs algébriques

Sommaire

I Sommes et produits

1 Somme de termes

Définition 1

Étant donnée une famille $\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$ de nombres réels ou complexes,

on note $\sum_{k=1}^{n} u_k$, ou $\sum_{1 \leq k \leq n} u_k$, ou encore $\sum_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} u_k$, la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Exemple :

▷ $\sum_{k=0}^{4} (-1)^k (2k+1) = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 = 5$

Théorème 1 : Somme de puissances.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Théorème 2 : Somme d'une progression arithmétique.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Pour tous nombres entiers p et n, avec $p < n$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier terme})}{2}$$

Théorème 3 : Somme d'une progression géométrique.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tous nombres entiers p et n, avec $p < n$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Théorème 4 : Factorisation de $a^{n+1}-b^{n+1}$

Pour tout nombres réels a et b, et pour tout nombre entier naturel n,

$$a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

Remarque :

▷ Lorsque n est pair, on a également : $a^{n+1}+b^{n+1} = (a+b)\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k$.

Exemples :

▷ $a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ et $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Exercice : <u>Calcul de sommes doubles</u>

▷ Calculons la somme de tous les produits dans les n premières tables de multiplication :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} i\times j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\times j = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

▷ Calculons la sommes des fractions d'entiers $\dfrac{i}{j}$ telles que $1\leq i\leq j\leq n$:

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\times\frac{n(2+n+1)}{2}$$

donc $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j} = \frac{n(n+3)}{4}$

Exercice : <u>Groupement des termes pairs et impairs dans une somme</u>

▷ Pour tout entier naturel n, on veut calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2k+1)$:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2\times 2k+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(2\times(2k+1)+1) = \sum_{k=0}^{n}(4k+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(4k+3)$$

$$= \frac{(n+1)(1+4n+1)}{2} - \frac{n(3+4n-1)}{2} = \frac{4n^2+6n+2}{2} - \frac{4n^2+2n}{2} = 2n+1$$

2 Produit de facteurs

Définition 2

Étant donnée une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de nombres réels ou complexes,

on note $\prod\limits_{k=1}^{n} u_k$, ou $\prod\limits_{1\leq k\leq n} u_k$, ou encore $\prod\limits_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} u_k$, le produit $u_1\times u_2\times\cdots\times u_n$.

Exemple :

▷ $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} \frac{k+2}{k+4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{7} \times \frac{6}{8} = \frac{3 \times 4}{7 \times 8} = \frac{3}{14}$

II Coefficients du binômes

Définition 3 : Factorielle d'un entier

Pour tout entier n, on appelle **factorielle** de n, et on note $n!$ le nombre :

$$\begin{array}{ll} \text{si } n = 0, & 0! = 1 \\ \text{si } n \geq 1, & n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n \end{array}$$

Exemple :

▷ $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

Remarque :

▷ Pour tout entier $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$

Définition 4 : Coefficients binomiaux

Pour tous entiers n et p positifs ou nuls, tels que $p \leq n$, on appelle coefficient binomial « p parmi n » et on note $\binom{n}{p}$ le nombre :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Exemple :

▷ $\displaystyle\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$, $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$, $\displaystyle\binom{n}{1} = n$.

Théorème 5

Pour tous n et p entiers naturels, tels que $0 \leq p \leq n$, $\displaystyle\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Exemple :

▷ $\displaystyle\binom{11}{9} = \binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55.$

Théorème 6 : Formule de Pascal

Pour tous nombres entiers n et p, tel que $1 \leq p \leq n$,

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

Démonstration :

Pour tous n et p entiers naturels, tels que $1 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \times \frac{n+1}{p(n-p+1)} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} = \binom{n+1}{p}$$

Triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Corollaire

Les coefficients binomiaux sont tous des nombres entiers naturels.

Démonstration :
On démontre par récurrence la propriété :
$(\mathcal{P}_n)$: $\quad \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\}, \binom{n}{p}$ est un nombre entier naturel.

Théorème 7

Pour tout entier naturel n, $\quad \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

Démonstration :
On démontre par récurrence la proposition $(\mathcal{P}_n)$: $\quad \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $\binom{0}{0} = 1$ et $2^0 = 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = 2 + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} = 2 + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1}$

$\displaystyle= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} + 1 + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème 8 : Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels ou complexes a et b, et tout nombre entier naturel n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple :

▷ $(z+1)^5 = z^5 + \binom{5}{1} z^4 + \binom{5}{2} z^3 + \binom{5}{3} z^2 + \binom{5}{1} z + \binom{5}{0} = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1$