DEVOIR MAISON n° 6

Exercice 1

Soit n un nombre entier naturel non nul.

1. Calculer : $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$
2. Calculer : $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$
3. Montrer que : $\sum_{k=n}^{2n}k^2=\frac{n(14n^2+15n+1)}{6}$

Exercice 2

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on note :

$$\mathrm{P}_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

1. Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3.
2. Que valent $\mathrm{P}_n(0)$, $\mathrm{P}_n(1)$, et $\mathrm{P}_n(k)$ pour tout $k\in[\![-n,-1]\!]$?
3. Démontrer que, pour tout réel non nul x, on a :

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{x+n}{x}\mathrm{P}_n(x-1).$$

4. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, écrire $\mathrm{P}_n(p)$ comme un coefficient binomial.

Exercice 3 *

Soit $n\geq 1$ et $x_1,x_2,\dots,x_n$ des nombres réels tels que :

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n}x_k^2=n$$

Prouver que $x_k=1$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.