Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

$a(x)=\left(2x^2-x-1\right)^6$ $\qquad b(x)=2x+1-\dfrac{3}{(x-2)^3}$ $\qquad c(x)=x\operatorname{Arccos}\,(1-x)$

$d(x)=(x-2)(x-4)^5(x-8)^7$ $\qquad e(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $\qquad f(x)=\sqrt{1-\ln(x)}$ $\qquad g(x)=x^3e^{-3x+2}$

$h(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ $\qquad i(x)=\ln\left(x^2+3x\right)$ $\qquad j(x)=(\operatorname{ch}x)^x$ $\qquad k(x)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes ? Justifier.

(a) $\left(a^b\right)^c=a^{bc}$ (b) $a^ba^c=a^{bc}$ (c) $a^{2b}=\left(a^b\right)^2$

(d) $(ab)^c=a^{c/2}b^{c/2}$ (e) $\left(a^b\right)^c=a^{\left(b^c\right)}$ (f) $\left(a^b\right)^c=(a^c)^b$

Exercice 3 : Résoudre les équations ci-dessous.

(a) $\ln\left(2x^2+1\right)-1=\ln(2x+1)$ (b) $(\ln x)^2+3\ln x-4=0$ (c) $\ln(x)+\ln(x+3)=2\ln(2)$

(d) $\ln(x+1)+\ln(x-3)=2\ln(x-2)$ (e) $e^{2x}+e^x-2=0$

(f) $2e^x=e^{x^2}$ (g) $e^x-4e^{-x}=1$ (h) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, $a>0$ (i) $\dfrac{\ln(x)}{\ln 3}-\dfrac{\ln(x)}{\ln 2}=1$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{-2x}\geq\dfrac{1}{2}$ (b) $e^x<\dfrac{1}{4}e^{x^2}$ (c) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\geq 1$

(d) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\leq 2$ (e) $e^x\geq e^{2x}-1$ (f) $\ln\left(e^x-e^{-x}\right)>2$

Exercice 5

1. Résoudre l'équation : $\sqrt{e^{2x}-3e^x+2}=e^x-2$
2. Résoudre l'équation de paramètre réel m : $e^x-e^{-x}=2m$
3. Exprimer $\operatorname{ch}(x+y)$ et $\operatorname{sh}(x+y)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x),\operatorname{ch}(y),\operatorname{sh}(x),\operatorname{sh}(y)$.
4. Résoudre les équations d'inconnue x :
   (a) $\operatorname{sh}(x)=2$
   (b) $19\operatorname{sh}x-16\operatorname{ch}x=8$
   (c) $\operatorname{sh}(x)=\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$
   (d) $(1+m)\operatorname{ch}(x)+(1-m)\operatorname{sh}(x)=-2$, avec $m\in]-1;1[$

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+1)-\ln(2x-3))$ (b) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}\,(e^{-x})^3$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-3x^2-1\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-x^2\right)$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ (g) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x^2}$ (h) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x}$

Exercice 7

Calculer les limites des expressions suivantes aux points proposés :

(a) $\dfrac{x^3+x^2+x-14}{x^2-4}$ en 2 ; (b) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ en 0 ; (c) $\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ en 4.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.

1. *Préliminaires*
   On considère la fonction d définie sur $]0,+\infty[$ par $d(x)=x^2\ln x-x+1$.
   (a) Déterminer les fonctions d' et d''.
   (b) En déduire les variations de d'.
   (c) Montrer que $d'(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0,1]$.
   (d) Établir les variations puis le signe de d.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente.
4. Tracer la tangente et la courbe représentative de f.

Exercice 9

On note th la fonction d'expression $\mathrm{th}(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ et on pose : $g(x)=x\,\mathrm{th}(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de th et vérifier qu'il suffit d'étudier g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x)<1$ et $\mathrm{th}'(x)=1-\mathrm{th}^2(x)$.
3. Déterminer les variations de g.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x)=0$. Qu'en déduit-on pour $\mathscr{C}_g$?

Exercice 10

On note f la fonction définie sur $]-1;+\infty[-\{0\}$ par : $f(x)=(1+x)^{1/x}$.

1. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.
2. Justifier que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.
3. Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln\left(1-\frac{x}{x+1}\right)+\frac{x}{1+x} \leq 0$
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites au bord du domaine de définition.

Exercice 11 : Calculer.

(a) $\operatorname{Arcos}(\cos(25\pi))$ (b) $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{39\pi}{2}\right)\right)$ (c) $\operatorname{Arcos}\left(\cos\left(\dfrac{35\pi}{4}\right)\right)$ (d) $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{34\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 12

1. Montrer que : $\forall x \in [-1;1]$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}(x)\right)=\cos(\operatorname{Arcos}(x))$.
   En déduire : $\forall x \in [-1;1]$, $\operatorname{Arcos}(x)+\operatorname{Arcsin}(x)=\dfrac{\pi}{2}$.
2. Retrouver le résultat précédent en étudiant la dérivée de la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\operatorname{Arcos}(x)+\operatorname{Arcsin}(x)$
3. Donner une expression simple de $\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ pour $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice 13

On note f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser l'expression $\cos(x)+\sin(x)$
2. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f et expliquer pourquoi il est possible de restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0;2\pi]\cap\mathscr{D}$.
3. Déterminer la dérivée de f. Pour quelles valeurs de la variable est-elle définie ?
4. Déterminer le tableau de variations sur $[0;2\pi]\cap\mathscr{D}$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.