CHAPITRE 4

Fonctions usuelles

Sommaire

I Fonctions exponentielles et logarithmes

Ces deux familles de fonctions, les exponentielles et les logarithmes, apparaissent dans des contextes mathématiques très différents, et leurs liens intimes sont découverts dans un second temps.

Les tables de logarithmes sont inventées au XVII^e siècle notamment par John Neper (1550-1617) pour répondre aux besoins des astronomes de réaliser des calculs immenses (avec des nombres à douze ou quinze chiffres) en un temps raisonnable. Ces tables permettent de remplacer les multiplications par des additions, ce qui représente un gain de temps considérable !

Les exponentielles répondent à la question de définir a^x lorsque x est autre chose qu'un nombre entier : quel sens donner par exemple à $3^{1,2}$? Historiquement, les premières réponses s'appuient sur la formule généralisée du binôme. En effet, Blaise Pascal a démontré en 1654 que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^k$$

Isaac Newton (1642-1727) étend cette formule au cas où l'exposant n'est pas un nombre entier. La somme contient alors une infinité de termes.

Le développement de l'analyse au XVIII^e siècle amène les mathématiciens à privilégier le logarithme qui est réciproque de la fonction exponentielle, qui sera bien plus tard baptisé « logarithme népérien », bien que ce ne soit pas celui qu'employait Napier !

1 Fonction exponentielle

Théorème 1 (admis)

Il existe une unique fonction f, appelée exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note pour l'instant exp la fonction exponentielle.

Théorème 2 : Propriétés fonctionnelles

Pour tous nombres réels x et y, et pour tout nombre entier relatif n,

- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\big(\exp(x)\big)^n = \exp(nx)$

Démonstration :

• Pour tout nombre réel y, considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

On a $g'(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$ et $g(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$,

donc g est la fonction exponentielle, c'est-à-dire que $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$,

ou encore $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

• Dès lors, pour tout nombre réel x,

$\exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$, mais $\exp(x-x) = \exp(0) = 1$,

d'où l'on conclut que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

• on peut démontrer le dernier point par récurrence.

Remarque :

▷ La fonction exponentielle possède les propriétés des fonctions puissance, et pour tout entier n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \big(\exp(1)\big)^n$.
Donc si l'on note $e = \exp(1)$, $\exp(n) = e^n$.

Définition 1 : Notation

Pour tout nombre réel x, $\exp(x)$ est noté e^x.

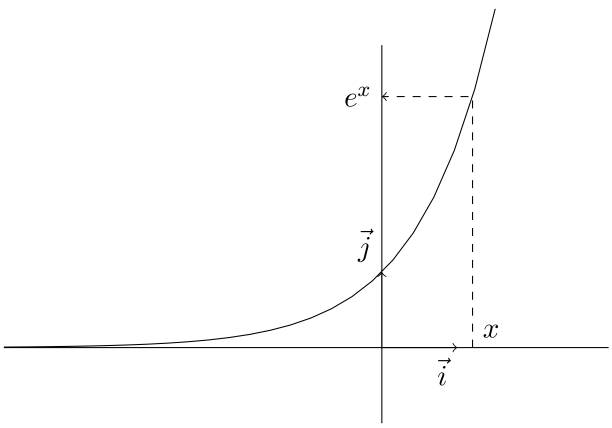
Théorème 3 : Propriétés (admises)

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Remarque :

▷ La fonction exponentielle induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.



2 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition 2

Le cosinus hyperbolique, noté cosh, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

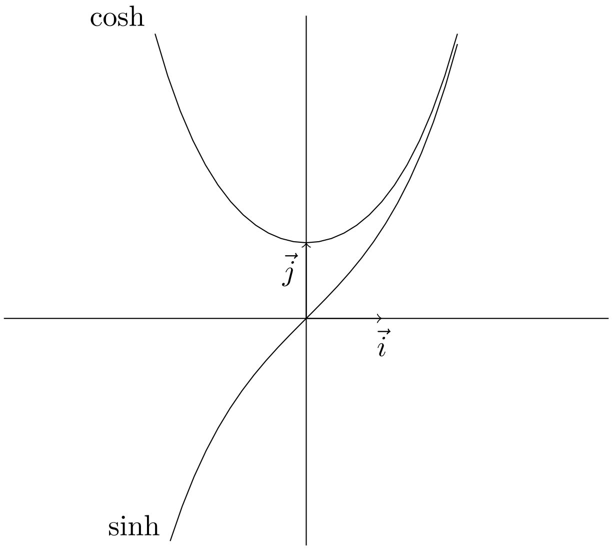
Le sinus hyperbolique, noté sinh, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Théorème 4

La fonction cosh est paire, strictement positive, $\lim\limits_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$, et la dérivée de cosh est la fonction $x \mapsto \sinh(x)$.

Théorème 5

La fonction sinh est impaire, $\sinh x$ est du signe de x, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$, et la dérivée de sinh est la fonction $x \mapsto \cosh(x)$.



3 Fonction logarithme népérien

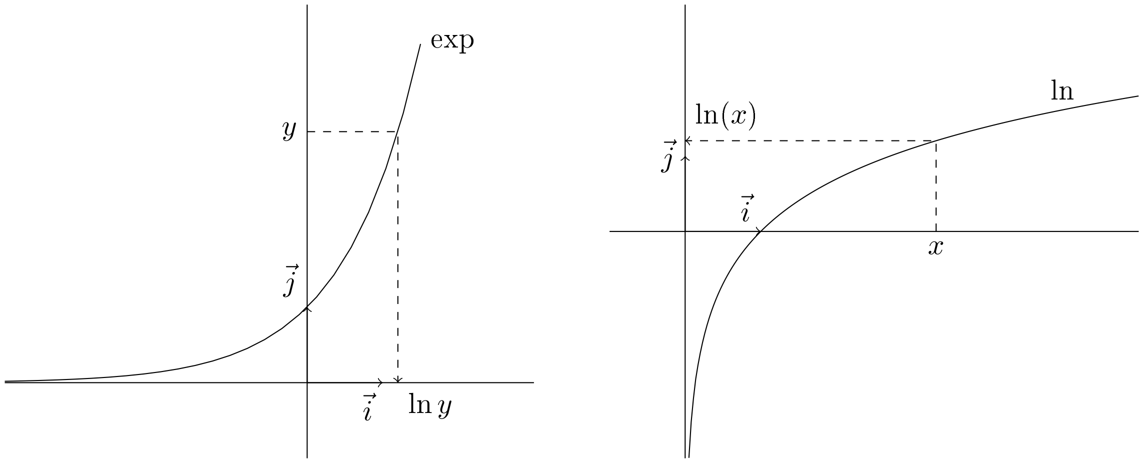
Définition 3

On appelle fonction logarithme néperien, et on note ln, la fonction définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ comme fonction réciproque de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

Remarques :

▷ En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$ et $\forall y \in]0; +\infty[, \quad e^{\ln y} = y$
▷ Vu que $e^0 = 1$, on a $\ln 1 = 0$.



Théorème 6 : Propriétés fonctionnelles de la fonction logarithme

Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, et pour tout nombre entier relatif n,

- $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$
- $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$
- $\ln \left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^n) = n \times \ln x$

Définition 4 : Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est définie sur $]0, +\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Elle a toutes les propriétés de la fonction ln décrites dans le théorème ci-dessus.
Par ailleurs, $\log 10 = 1$.

Remarque :

▷ Le logarithme décimal d'un nombre donne son ordre de grandeur : $10^{\lfloor \log x \rfloor} \leq x < 10^{\lfloor \log x \rfloor + 1}$.
Par exemple, si $\log x = 4,72$, alors $10^4 \leq x < 10^5$, et x est de l'ordre de $10\,000$.

Théorème 7

La fonction logarithme népérien a pour fonction dérivée la fonction inverse :

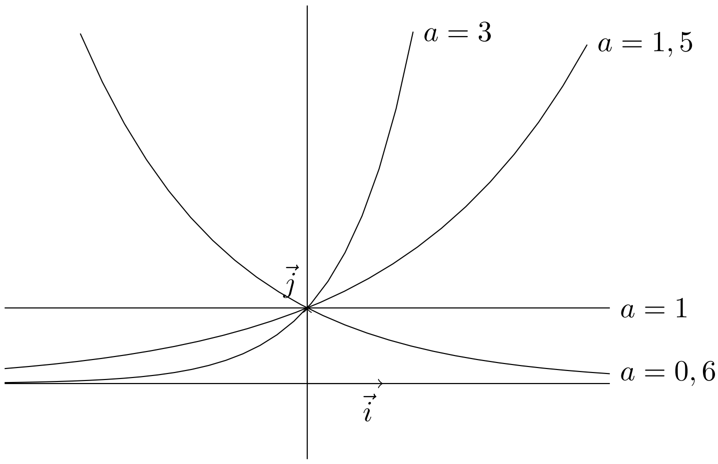
$$\forall x > 0, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction ln est strictement croissante, strictement négative pour $0 < x < 1$ et strictement positive pour $x > 1$.
$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale) et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

4 Fonctions exponentielles généralisées

Théorème 8

On définit pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$.



Courbes des fonctions $x \mapsto a^x$

II Fonctions puissance

Définition 5

Nous pouvons désormais définir, pour tout nombre réel α, la fonction puissance α définie sur $]0; +\infty[$ par :

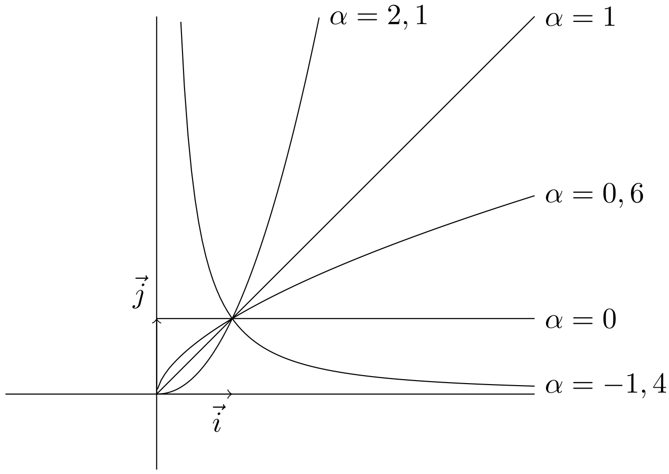
$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Remarque :
- ▷ Lorsque α est un nombre entier relatif, nous retrouvons bien les fonctions puissances que nous connaissions déjà.

Théorème 9

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in]0; +\infty[, \qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta \qquad x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$$

Remarque :
- ▷ La fonction racine carrée correspond à la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$.



Courbes des fonctions $x \mapsto x^\alpha$

III Croissance comparée

Théorème 10 : Théorème de croissance comparée

En cas d'indétermination dans la recherche de la limite du produit de deux fonctions parmi exponentielle, puissance et logarithme, la limite est donnée par celle de l'exponentielle, et sinon par celle de la puissance.
En particulier, les limites suivantes doivent être connues :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Démonstration :
Prouvons par exemple que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$.
On a $f'(x) = x(x+2)e^x$ d'où l'on déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

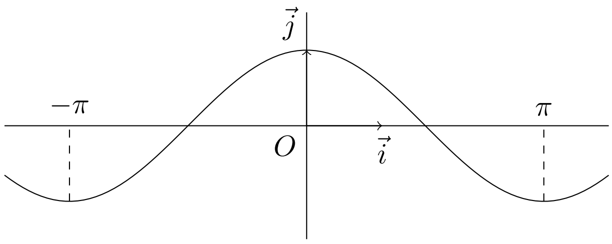
Nous lisons que : $\forall x \in]-\infty; 0[, 0 < x^2e^x \leq 4e^{-2} < 4$, donc $\dfrac{4}{x} < xe^x < 0$ (car $x < 0$),
or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

IV Fonctions circulaires et circulaires réciproques

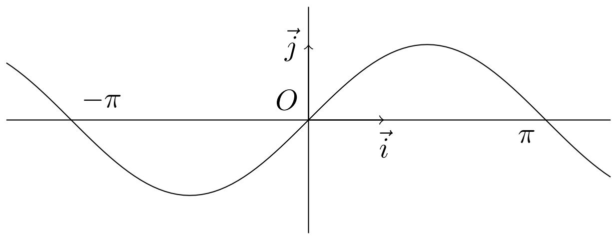
1 Fonctions circulaires

Théorème 11

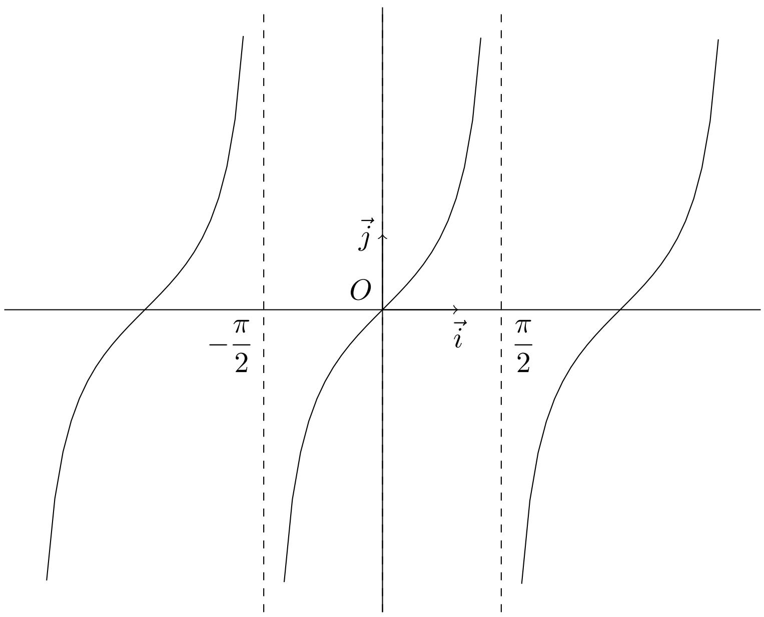
La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, elle est paire, périodique de période 2π, et elle a pour dérivée $x \mapsto -\sin x$.
La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, elle est impaire, périodique de période 2π, et elle a pour dérivée $x \mapsto \cos x$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, elle est impaire, périodique de période π, et elle a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ (asymptotes verticales).



Courbe de $x \mapsto \cos x$



Courbe de $x \mapsto \sin x$



Courbe de $x \mapsto \tan x$

Remarque :

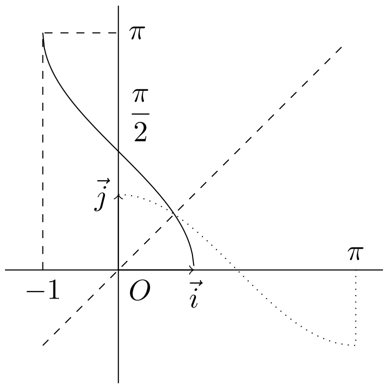
▷ La fonction cos induit une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$, la fonction sin induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$, et la fonction tan induit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
D'où les définitions suivantes.

2 Fonctions circulaires réciproques

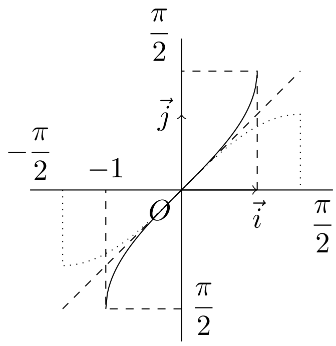
Définition 6 : Fonctions Arc cosinus et Arc sinus

Fonction Arc cosinus : pour tout $x \in [-1;1]$,
Arccos x est l'unique nombre de l'intervalle $[0;\pi]$ dont le cosinus vaut x.
La fonction Arccos a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Fonction Arc sinus : pour tout $x \in [-1;1]$,
Arcsin x est l'unique nombre de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.
La fonction Arcsin a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



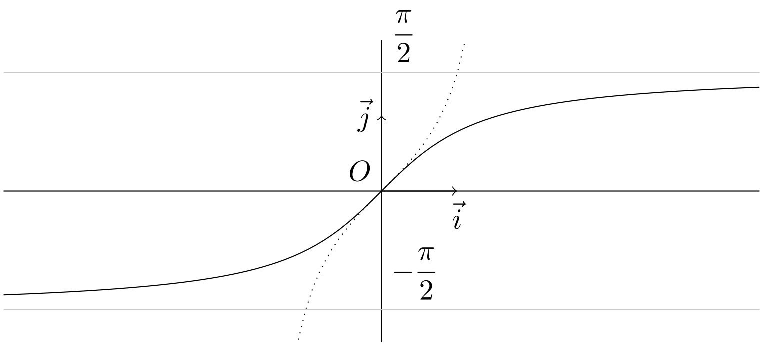
Courbe de $x \mapsto$ Arccos x



Courbe de $x \mapsto$ Arcsin x

Définition 7 : Fonction Arc tangente

Fonction Arc tangente : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
Arctan x est l'unique nombre de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.
La fonction Arctan a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.



Courbe de $x \mapsto$ Arctan x

Remarque :

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ (asymptotes horizontales).