DEVOIR MAISON N° 5

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

1. (a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) En posant $x = \dfrac{2}{u}$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(\frac{x}{4}+\frac{5}{2}\right)\right)$.
   Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?
   (c) Déterminer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Pour $x>0$, on pose : $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$.
   Étudier les variations de g en précisant les limites en $+\infty$ et 0^+.
   (c) Vérifier que pour tout $x>0$, $g(x)>0$. En déduire les variations de f.
   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative le plus précisément possible.

Exercice 2

On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x>0,\quad f_n(x) = x(\ln(x))^n$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1. Quelle est la limite de f_n en 0 ?
2. Étudier les variations de f_n. (On distinguera deux cas suivant la parité de n).
3. Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes.
4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$ lorsque x décrit $[1;+\infty[$.
5. Construire $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur un même graphique.