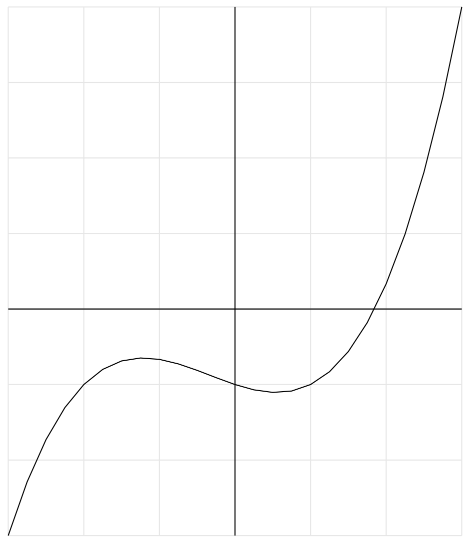
Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3,3]$.



1. Résoudre graphiquement les équations $f(x)=-1$, $f(x)=4$ et $f(x)=-4$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq -1$.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, indiquer si sa courbe représentative possède une asymptote horizontale ou une asymptote verticale.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$ sur $]-\infty,1[$ b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{1-2x^2}$ sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ d) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$ sur $]-3,+\infty[$

Exercice 3

Montrer que pour tout $t\geq 0$, on a $t\geq \sin t$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t\cos t$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Tracer cette tangente et la courbe de f sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. À quel intervalle minimal peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Étudier les variations de f sur cet intervalle.
4. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x - \varphi)$, où $\varphi \in [0, \pi]$.

1. Déterminer la plus petite période T de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$.

Exercice 7

Donner un encadrement le plus précis possible :

a) De $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in [0,1]$ b) De $f(x) = \cos x + \sin x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

c) De $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ pour $x \in [0,2]$ d) De $f(x) = \ln(x^2+1)$ pour $x \in [-1,1]$

Exercice 8

Déterminer dans chaque cas si la fonction f est minorée, majorée, ou bornée sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 2\cos^2 x + 3\sin x + 2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$ sur $\mathrm{I} =]-1, +\infty[$

c) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{1-x}$ sur $\mathrm{I} =]0,1[$ d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$

Exercice 9

Dans chacun des cas : tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle I, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a, et déterminer si la courbe est au-dessus, au-dessous ou si elle traverse sa tangente au voisinage de a.

1. $f(t) = 1 - 2\sin t$ sur $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$, $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ sur $\mathrm{I} =]-1,1[$, $a = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{4}x(x-1)(x-2)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $a = 1$.
4. $f(x) = 1 - e^x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $a = 1$ (commencer par établir que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 10

Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$; b) $f(x) = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$; c) $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; e) $f(x) = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.