CHAPITRE 3

Fonctions : généralités

Sommaire

I Parité et périodicité

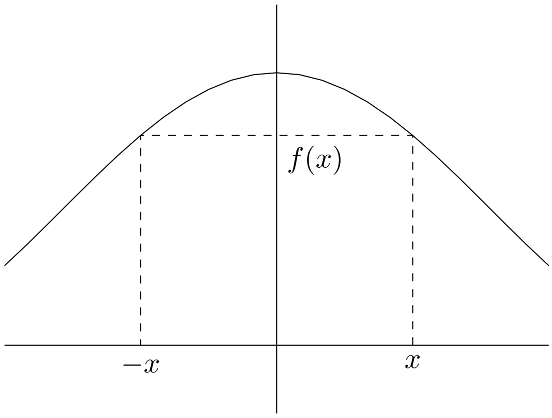
Définition 1 : Fonctions paires et impaires

Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est dite **paire** lorsque :

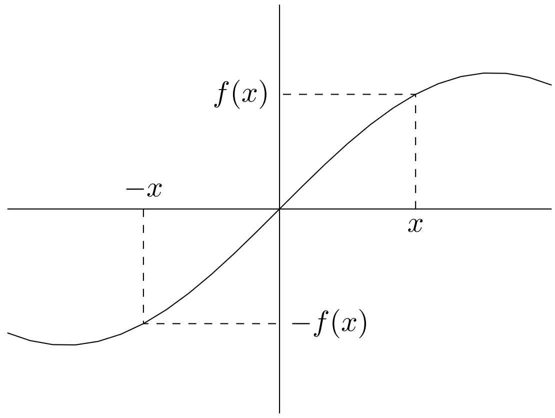
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est dite **impaire** lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$



Courbe d'une fonction paire



Courbe d'une fonction impaire

Exemples :

▷ La fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ est paire.
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \sin x$ est impaire.

Théorème 1

La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

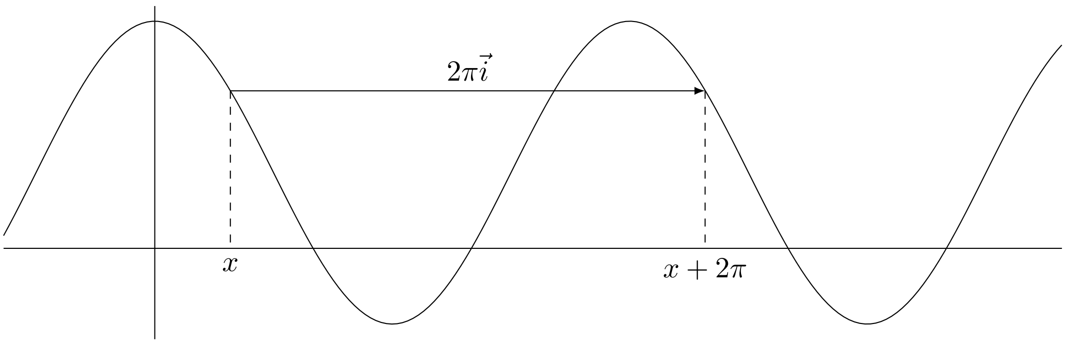
Définition 2 : Fonction périodique

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique de période T lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

Exemple :

- ▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos x + 1$ est périodique de période $T = 2\pi$.



II Monotonie, bornes

Définition 3

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **croissante** sur cet intervalle lorsque $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **décroissante** sur cet intervalle lorsque $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

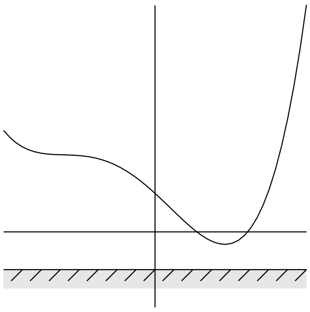
Remarque :

- ▷ En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on obtient la définition d'une fonction strictement croissante ou strictement décroissante.

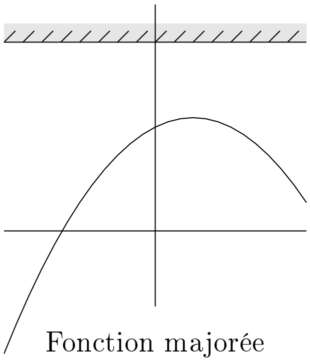
Définition 4

Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est dite :

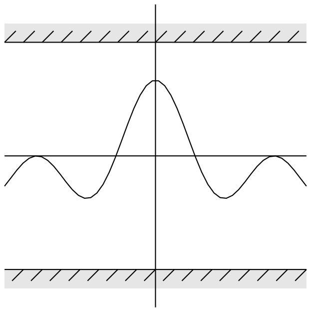
- **majorée** lorsqu'il existe un nombre M tel que $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq M$
- **minorée** lorsqu'il existe un nombre m tel que $\forall x \in \mathcal{D}, \quad m \leq f(x)$
- **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.



Fonction minorée



Fonction majorée



Fonction bornée

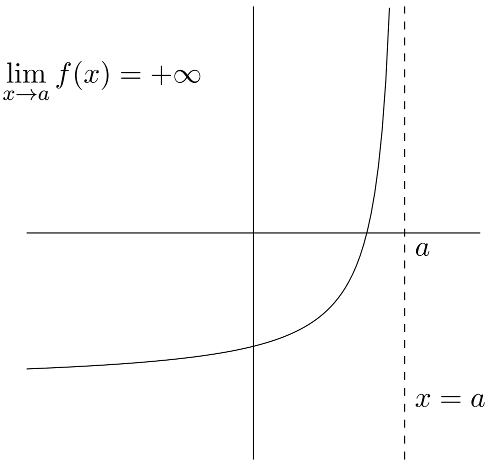
III Asymptotes verticales et horizontales

Définition 5 : Asymptote verticale

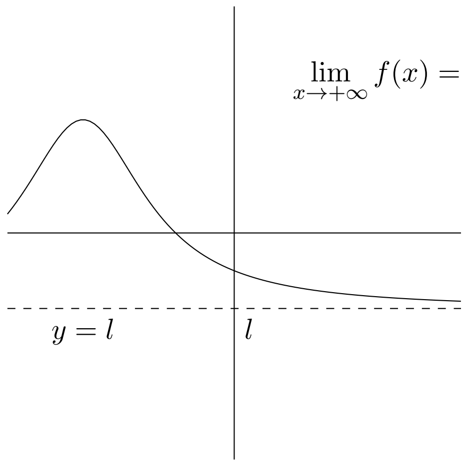
Étant donnée une fonction f définie au voisinage d'un nombre réel a,
Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Définition 6 : Asymptote horizontale

Étant donnée une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$),
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$), on dit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



Asymptote verticale



Asymptote horizontale

Méthode : Trouver la limite d'une fraction rationnelle à l'infini.

▷ La limite d'une fraction rationnelle à l'infini est donnée par la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple : Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 5x - 3}$?

Quotient des termes de plus haut degré : $\dfrac{2x^3}{3x^2} = \dfrac{2}{3}x$

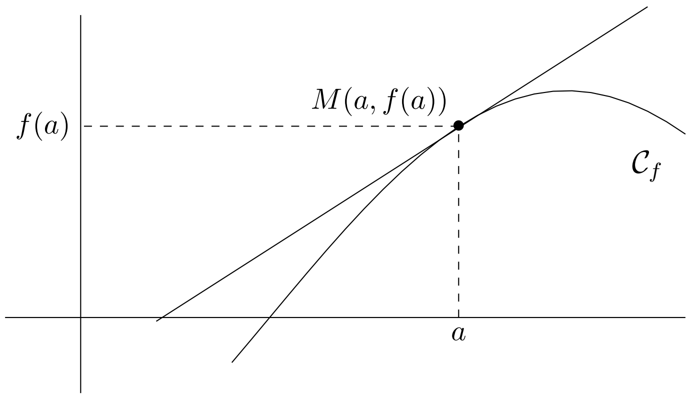
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3}x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

IV Dérivation

Théorème 2 (admis) Équation de la tangente

Étant donnée une fonction f dérivable sur un intervalle I et $a \in I$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ est égal à $f'(a)$.
L'équation de la tangente en ce point est donc :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Théorème 3 : Dérivée de la fonction réciproque

Étant donnée une fonction f dérivable et bijective d'un intervalle I dans un intervalle J, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Démonstration :
Pour tout $y \in J$, $f \circ f^{-1}(y) = y$ donc en dérivant $\left(f^{-1}\right)'(y) \times f' \circ f^{-1}(y) = 1$

Exemple :

▷ Soit f définie de $[0, +\infty[$ dans $[0, \infty[$ par $f(x) = x^2$.
f est dérivable et $f'(x) = 2x$. f est bijective et $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
On a $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ (ce que l'on savait déjà ...)

Définition 7 : Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ exprimée par $f(x) = r(x) + i \times m(x)$, où r et m sont des fonctions à valeurs réelles,
la dérivée de f est la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f'(x) = r'(x) + i \times m'(x)$

Exemple :

▷ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + i \cos x = ie^{ix}$

Théorème 4

Les règles de calcul des dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles.

Exemple

- ▷ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ix^2 + 1)e^{ix}$.
  On a $f'(x) = 2ixe^{ix} + (ix^2 + 1)ie^{ix} = (-x^2 + 2ix + i)e^{ix}$

Définition 8 : Dérivées d'ordre supérieur

Étant donnée une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I, dont la dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de la dérivée f', et on la note f''.
De la même façon, lorsque les $(n-1)$ premières dérivées sont dérivables, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f.

Exemple :

- ▷ Soit la fonction f définie sur $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$.
  On a $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$, $f''(x) = 12x - 2$, $f^{(3)}(x) = 12$ et $f^{(4)}(x) = 0$.